

LS-S. 25 Aufgabe 5

Forscher haben das Wachstum einer Bakterienkultur in einer Petrischale beobachtet. Die von Bakterien bedeckte Fläche (in cm^2) in Abhängigkeit der vergangenen Zeit (in h) seit dem Beobachtungsbeginn um 8 Uhr morgens kann im Zeitraum von 8 Uhr morgens bis 12 Uhr mittags des darauf folgenden Tages näherungsweise durch die Funktion A mit $A(t) = -0,005t^3 + 0,2t^2 + 0,9t + 1$ beschrieben werden.

- Bestimmen Sie die von Bakterien bedeckte Fläche bei Beobachtungsbeginn und um 3 Uhr morgens.
- Berechnen Sie die maximale Zunahme der von den Bakterien bedeckten Fläche.

Lösung

a) $A(0) = -0,005 \cdot 0^3 + 0,2 \cdot 0^2 + 0,9 \cdot 0 + 1 = 1$

$$A(19) = -0,005 \cdot 19^3 + 0,2 \cdot 19^2 + 0,9 \cdot 19 + 1 = 56,005$$

Bei Beobachtungsbeginn um 8 Uhr morgens beträgt die von Bakterien bedeckten Fläche 1 cm^2 , um 3 Uhr morgens, also 19 Stunden später beträgt sie ca. 56 cm^2

- b) Gesucht ist das absolute Maximum der 1. Ableitung

$$A'(t) = -0,015t^2 + 0,4t + 0,9 \text{ über dem Definitionsbereich } 0 \leq t \leq 28.$$

$$A''(t) = -0,03t + 0,4, \quad A'''(t) = -0,03$$

$$A''(t) = 0 \Leftrightarrow -0,03t + 0,4 = 0 \Leftrightarrow -0,03t = -0,4 \Leftrightarrow t = \frac{40}{3} = 13,\bar{3}$$

Nur $\frac{40}{3} = 13,\bar{3}$ kann Hochstelle von A' sein.

$$A''\left(\frac{40}{3}\right) = 0 \wedge A'''\left(\frac{40}{3}\right) = -0,03 < 0 \Rightarrow \frac{40}{3} \text{ ist Hochstelle von } A'.$$

$$A'\left(\frac{40}{3}\right) = -0,015 \cdot \left(\frac{40}{3}\right)^2 + 0,4 \cdot \left(\frac{40}{3}\right) + 0,9 = \frac{107}{30} = 3,5\bar{6}$$

ist einziges lokales Maximum von A' .

Vergleich mit den Randwerten

$$A'(0) = -0,015 \cdot 0^2 + 0,4 \cdot 0 + 0,9 = 0,9 \text{ und}$$

$$A'(28) = -0,015 \cdot 28^2 + 0,4 \cdot 28 + 0,9 = 0,34 \text{ zeigt, dass}$$

$$A'\left(\frac{40}{3}\right) = 3,5\bar{6} \text{ das absolute Maximum von } A' \text{ ist.}$$

$13,\bar{3}$ Stunden nach Beobachtungsbeginn, also um 21:20 Uhr nimmt die von den Bakterien bedeckte Fläche am stärksten zu.

Die maximale Flächenzunahme beträgt ca. 3,6 Quadratzentimeter pro Stunde.