LS-S. 28 Aufgabe 3

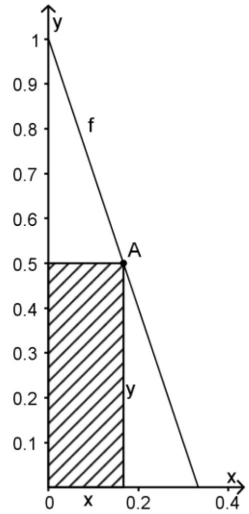
Die rechte obere Ecke eines Rechecks soll auf dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = -3x + 1$ liegen und die untere linke Ecke im Ursprung des Koordinatensystems. Die Seiten des Rechtecks liegen auf bzw. parallel zu den Koordinatenachsen.

a) Erstellen Sie eine geeignete Skizze zu dem Sachverhalt.

b) Bestimmen Sie genaue Lage und Größe des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt.

Lösung

a)



b) Extremalbedingung: $A = x \cdot y$ soll maximal sein.

Nebenbedingung: $y = f(x) = -3x + 1$

Zielfunktion: $A(x) = x \cdot (-3x + 1) = -3x^2 + x$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Definitionsbereich: $0 \le x \le \frac{1}{3}$.

Gesucht ist das absolute Maximum der Zielfunktion.

Randwerte: $A(0) = -3 \cdot 0^2 + 0 = 0$

$$A\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = -\frac{3}{9} + \frac{1}{3} = 0$$

Ableitungen: $A'(x) = -6x + 1$, $A''(x) = -6$

Lokale Maxima:

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 1 = 0 \Leftrightarrow -6x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$ Nur $\frac{1}{6}$ kann Hochstelle sein.

$A'\left(\frac{1}{6}\right) = 0 \wedge A''\left(\frac{1}{6}\right) = -6 < 0 \Rightarrow \frac{1}{6}$ ist Hochstelle.

$A\left(\frac{1}{6}\right) = -3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} = -\frac{3}{36} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$ ist lokales Maximum.

Vergleich mit den Randwerten zeigt, dass $A\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$ das absolute Maximum der Zielfunktion ist.

Gesuchte Abmessungen:

$x = \frac{1}{6}$., $y = f\left(\frac{1}{6}\right) = -3 \cdot \frac{1}{6} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{12}$