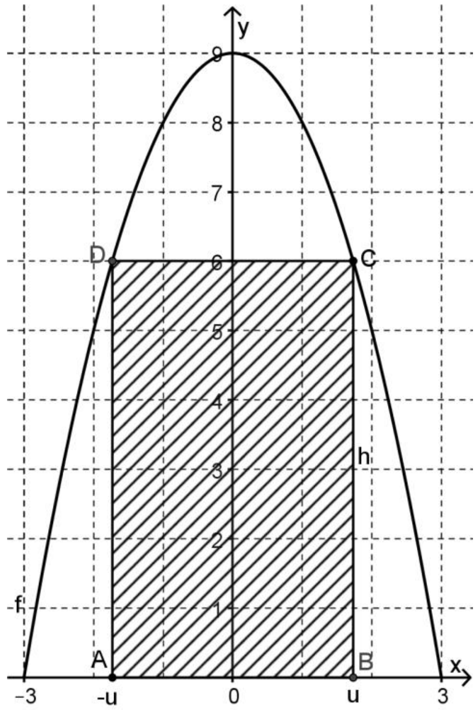
LS-S. 28 Aufgabe 4a

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 9$.
Die Punkte $A = (-u/0)$,.$B = (u/0)$, $C = (u/f(u))$ und $D = (-u/f(-u))$ mit $0 \le u \le 3$ bilden ein Rechteck (s. Abbildung).



Berechnen Sie, für welchen Wert von u der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird.

Lösung

Extremalbedingung:
$A = 2u \cdot h$ soll maximal sein.

Nebenbedingung:
$h = f(u) = -u^2 + 9$

Zielfunktion: $A(u) = 2u \cdot (-u^2 + 9) = -2u^3 + 18u$

Definitionsbereich: $0 \le u \le 3$.

Gesucht ist das absolute Maximum der Zielfunktion.

Ableitungen: $A'(u) = -6u^2 + 18$, $A''(u) = -12u$

Lokale Maxima:
$A'(u) = 0 \Leftrightarrow -6u^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow -6u^2 = -18 \Leftrightarrow u^2 = 3 \Leftrightarrow u = -\sqrt{3} \vee u = \sqrt{3}$

Da $-\sqrt{3}$ nicht im Definitionsbereich liegt, kann nur $\sqrt{3}$ Hochstelle sein.

$A'\left(\sqrt{3}\right) = 0 \wedge A''\left(\sqrt{3}\right) = -12 \cdot \sqrt{3} < 0 \Rightarrow \sqrt{3}$ ist Hochstelle.

$A\left(\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\sqrt{3}^2 + 9\right) = 2\sqrt{3} \cdot (-3 + 9) = 12\sqrt{3}$ ist lokales Maximum.

Vergleich mit den Randwerten $A(0) = A(3) = 0$ zeigt, dass $A\left(\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3}$ das absolute Maximum der Zielfunktion ist.

Gesuchte Abmessungen:
$u = \sqrt{3}$., $h = f\left(\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}^2 + 9 = -3 + 9 = 6$, $A = 12\sqrt{3}$