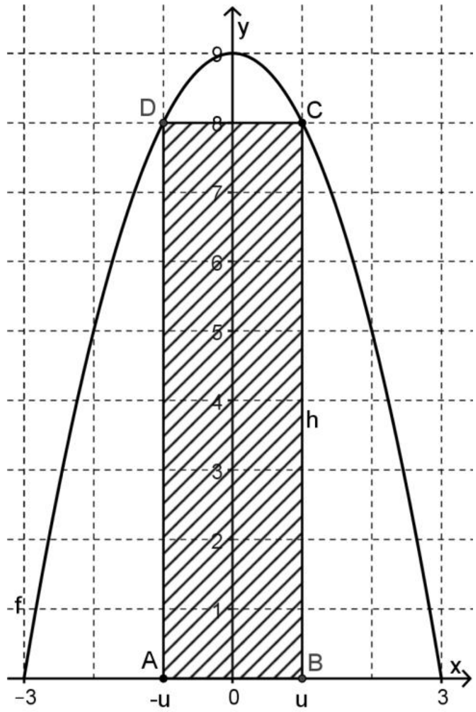
LS-S. 28 Aufgabe 4b

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 9$.
Die Punkte $A = (-u/0)$,.$B = (u/0)$, $C = (u/f(u))$ und $D = (-u/f(-u))$ mit $0 \le u \le 3$ bilden ein Rechteck (s. Abbildung).



Berechnen Sie, für welchen Wert von u der Umfang des Rechtecks maximal wird.

Lösung

Extremalbedingung:
$U = 4u + 2h$ soll maximal sein.

Nebenbedingung:
$h = f(u) = -u^2 + 9$

Zielfunktion: $U(u) = 4u + 2\cdot(-u^2 + 9) = 4u - 2u^2 + 18 = -2u^2 + 4u + 18$
Definitionsbereich: $0 \le u \le 3$.

Gesucht ist das absolute Maximum der Zielfunktion.

Ableitungen: $U'(u) = -4u + 4$, $A''(u) = -4$

Lokale Maxima:
$U'(u) = 0 \Leftrightarrow -4u + 4 = 0 \Leftrightarrow -4u = -4 \Leftrightarrow u = 1$
Nur 1 Hochstelle sein.

$U'(1) = 0 \wedge U''(1) = -4 < 0 \Rightarrow 1$ ist Hochstelle.

$U(1) = 4\cdot 1 + 2\cdot\left(-1^2 + 9\right) = 4 + 2\cdot 8 = 4 + 16 = 20$ ist lokales Maximum.

Randwerte: $U(0) = 4\cdot 0 + 2\cdot\left(-0^2 + 9\right) = 2\cdot 9 = 18$,

$U(3) = 4\cdot 3 + 2\cdot\left(-3^2 + 9\right) = 12 + 2\cdot 0 = 12$

Vergleich mit den Randwerten
$U(0) = 4\cdot 0 + 2\cdot\left(-0^2 + 9\right) = 2\cdot 9 = 18$ und
$U(3) = 4\cdot 3 + 2\cdot\left(-3^2 + 9\right) = 12 + 2\cdot 0 = 12$ zeigt, dass
$U(1) = 20$ das absolute Maximum der Zielfunktion ist.

Gesuchte Abmessungen:
$u = 1$, $h = f(1) = -1^2 + 9 = 8$, $U = 20$