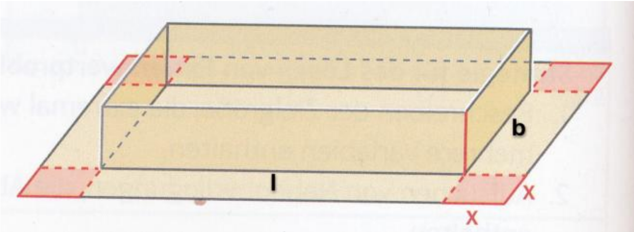
LS-S. 28 Aufgabe 5

Aus einem recheckigen Stück Pappe der Länge 16 cm und der Breite 10 cm werden an den Ecken Quadrate der Seitenlänge x ausgeschnitten und die überstehenden Teile zu einer nach oben offenen Schachtel hochgebogen (s. Abbildung).




Berechnen Sie, für welchen Wert von x das Volumen der Schachtel maximal wird.

Lösung

Extremalbedingung:
$V = l \cdot b \cdot x$ soll maximal sein.

Nebenbedingungen:
$l = 16 - 2x$ , $b = 10 - 2x$

Zielfunktion:
$V(x) = (16-2x)\cdot(10-2x)\cdot x = \left(160 - 32x - 20x + 4x^2\right)\cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$

Definitionsbereich: $0 \le x \le 5$.

Gesucht ist das absolute Maximum der Zielfunktion.

Ableitungen: $V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$ , $V''(x) = 24x - 104$

Lokale Maxima:

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 104x + 160 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{26}{3}x + \frac{40}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{26}{3}x + \frac{40}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{26}{3}x = -\frac{40}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{26}{3}x + \left(\frac{13}{3}\right)^2 = -\frac{40}{3} + \frac{169}{9} \Leftrightarrow \left(x - \frac{13}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{13}{3} = \pm\frac{7}{3} \Leftrightarrow x = \frac{13}{3} \pm \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{20}{3}$$

Da $\frac{20}{3}$ nicht im Definitionsbereich liegt, kann nur 2 Hochstelle sein.

$V'(2) = 0 \wedge V''(2) = 24\cdot 2 - 104 = -56 < 0 \Rightarrow 2$ ist Hochstelle.

$V(2) = (16 - 2\cdot 2)\cdot(10 - 2\cdot 2)\cdot 2 = 12\cdot 6\cdot 2 = 144$ ist lokales Maximum.

Vergleich mit den Randwerten $V(0) = V(5) = 0$ zeigt, dass $V(2) = 144$ das absolute Maximum der Zielfunktion ist.

Gesuchte Abmessungen:
$x = 2.$, $l = 12$ , $b = 6$