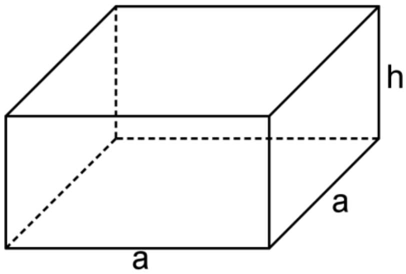
LS-S. 29 Aufgabe 10

Ein nach oben offener Karton mit quadratischer Grundfläche soll bei einer vorgegebenen Oberfläche von 100 cm^2 ein möglichst großes Volumen besitzen.
Bestimmen Sie die Maße dieses Kartons.



Lösung

Extremalbedingung: $V = a^2 \cdot h$ soll maximal sein.

Nebenbedingung: $O = a^2 + 4ah = 100 \Leftrightarrow 4ah = 100 - a^2 \Leftrightarrow h = \frac{100 - a^2}{4a}$

Zielfunktion: $V(a) = a^2 \cdot \frac{100 - a^2}{4a} = a \cdot \frac{100 - a^2}{4} = -\frac{1}{4}a^3 + 25a$

Definitionsbereich: $0 \le a \le 10 \quad \left(h = \frac{100 - a^2}{4a} = 0 \rightarrow 100 - a^2 = 0 \rightarrow a = \sqrt{100} = 10 \right)$

Gesucht ist das absolute Maximum der Zielfunktion.

Ableitungen: $V'(a) = -\frac{3}{4}a^2 + 25$, $V''(a) = -\frac{3}{2}a$

Lokale Maxima:

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}a^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = \frac{100}{3} \Leftrightarrow a = -\sqrt{\frac{100}{3}} \vee a = \sqrt{\frac{100}{3}}$$

Da $-\sqrt{\frac{100}{3}}$ nicht im Definitionsbereich liegt, kann nur $\sqrt{\frac{100}{3}} \approx 5{,}7735$ Hochstelle sein.

$$V'\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) = 0 \wedge V''\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) = -\frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{100}{3}} \text{ ist Hochstelle.}$$

$$V\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) = \sqrt{\frac{100}{3}} \cdot \frac{100 - \sqrt{\frac{100}{3}}^2}{4} = \sqrt{\frac{100}{3}} \cdot \frac{100 - \frac{100}{3}}{4} = \sqrt{\frac{100}{3}} \cdot \frac{\frac{200}{3}}{4} = \sqrt{\frac{100}{3}} \cdot \frac{200}{12} \approx 96{,}225$$

ist lokales Maximum.

Vergleich mit den Randwerten $V(0) = V(10) = 0$ zeigt, dass $V\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) \approx 96{,}225$

das absolute Maximum der Zielfunktion ist.

Gesuchte Abmessungen:

$$a = \sqrt{\frac{100}{3}} \approx 5{,}7735., \quad h \approx \frac{100 - 5{,}7735^2}{4 \cdot 5{,}7735} \approx 2{,}8868 \ , \quad V \approx 96{,}225$$