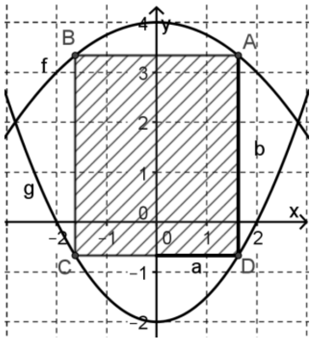
LS-S. 29 Aufgabe 11

Die Funktionen f und g mit $f(x)=4-0,25x^2$ und $g(x)=0,5x^2-2$ begrenzen eine Fläche, in der ein zur y-Achse symmetrisches Rechteck ABCD liegt. A und B liegen auf dem Graphen von f, die Punkte C und D auf dem Graphen von g.

a) Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der beiden Parabeln sowie deren Schnittpunkte und fertigen Sie eine Skizze mit den Parabeln und der Lage des Rechtecks an.

b) Das Rechteck soll einen möglichst großen Flächeninhalt haben. Beschriften Sie die Skizze und stellen Sie die Zielfunktion mithilfe der Funktionsgleichungen von f und g auf.

c) Berechnen Sie die Eckpunkte, für die der Flächeninhalt des Rechtecks am größten wird.



Lösung

a) $S_f\left(0/4\right)$, $S_g\left(0/-2\right)$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 4-0,25x^2=0,5x^2-2\Leftrightarrow -0,75x^2=-6$

$\Leftrightarrow x^2=8\Leftrightarrow x=-\sqrt{8}\vee x=\sqrt{8}$

$f\left(-\sqrt{8}\right)=g\left(-\sqrt{8}\right)=f\left(\sqrt{8}\right)=g\left(\sqrt{8}\right)=2$, $S_1\left(-\sqrt{8}/2\right)$, $S_2\left(\sqrt{8}/2\right)$

b) Extremalbedingung: $A=2a\cdot b$ soll maximal sein.

N-Bed.: $b=f(a)-g(a)=4-0,25a^2-\left(0,5a^2-2\right)=4-0,25a^2-0,5a^2+2=-0,75a^2+6$

Zielfunktion: $A(a)=2a\cdot\left(-0,75a^2+6\right)=-1,5a^3+12a$

Definitionsbereich: $0\le a\le\sqrt{8}$.

c) Ableitungen: $A'(a)=-4,5a^2+12$, $A''(a)=-9a$

Lokale Maxima:

$A'(a)=0\Leftrightarrow -4,5a^2+12=0\Leftrightarrow 4,5a^2=12\Leftrightarrow a^2=\frac{8}{3}\Leftrightarrow a=-\sqrt{\frac{8}{3}}\vee a=\sqrt{\frac{8}{3}}$

Da $-\sqrt{\frac{8}{3}}$ nicht im Definitionsbereich liegt, kann nur $\sqrt{\frac{8}{3}}\approx 1,63$ Hochstelle sein.

$A'\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=0\wedge A''\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=-9\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}<0\Rightarrow\sqrt{\frac{8}{3}}$ ist Hochstelle.

$A\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=2\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\left(-0,75\sqrt{\frac{8}{3}}^2+6\right)=2\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}+6\right)=2\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot 4=8\sqrt{\frac{8}{3}}\approx 13,06$ ist lokales Maximum.

Vergleich mit den Randwerten $A(0)=A\left(\sqrt{8}\right)=0$ zeigt, dass $A\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)\approx 13,06$ das absolute Maximum der Zielfunktion ist.

Gesuchte Abmessungen:

$a=\sqrt{\frac{8}{3}}\approx 1,63.$, $b=-0,75\sqrt{\frac{8}{3}}^2+6=4$, $A\approx 13,06$

Eckpunkte: $A\left(\sqrt{\frac{8}{3}}/\frac{10}{3}\right)$, $B\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}/\frac{10}{3}\right)$, $C\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}/-\frac{2}{3}\right)$, $D\left(\sqrt{\frac{8}{3}}/-\frac{2}{3}\right)$