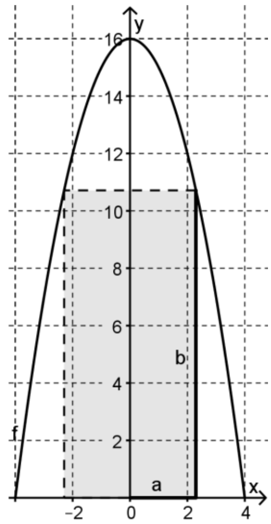
LS-S. 29 Aufgabe 7

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 16 - x^2$.
Der Graph von f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. In dieser Fläche soll ein Rechteck liegen, dessen Seiten auf bzw. parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Die beiden oberen Eckpunkte sollen auf dem Graphen liegen, die unteren Eckpunkte liegen auf der x-Achse.

a) Bestimmen Sie Nullstellen und Scheitelpunkt der Parabel und fertigen Sie eine Skizze der Parabel und des Rechtecks an.

b) Berechnen Sie, wo die Eckpunkte liegen müssen, damit das Rechteck einen möglichst großen Flächeninhalt hat.




Lösung

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 16 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$, S( 0 / 16 )

b) Extremalbedingung: $A = 2a \cdot b$ soll maximal sein. | Nebenbedingung: $b = f(a) = -a^2 + 16$

Zielfunktion: $A(a) = 2a \cdot (-a^2 + 16) = -2a^3 + 32a$

Definitionsbereich: $0 \le a \le 4$.

Gesucht ist das absolute Maximum der Zielfunktion.

Ableitungen: $A'(a) = -6a^2 + 32$ , $A''(a) = -12a$

Lokale Maxima:

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -6a^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow 6a^2 = 32 \Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow a = -\sqrt{\frac{16}{3}} \vee a = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

Da $-\sqrt{\frac{16}{3}}$ nicht im Definitionsbereich liegt, kann nur $\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2{,}3$ Hochstelle sein.

$$A'\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = 0 \wedge A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -12 \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{16}{3}} \text{ ist Hochstelle.}$$

$$A\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{16}{3}} \cdot \left(-\sqrt{\frac{16}{3}}^{\,2} + 16\right) = 2\sqrt{\frac{16}{3}} \cdot \left(-\frac{16}{3} + 16\right) \approx 49{,}27 \text{ ist lokales Maximum.}$$

Vergleich mit den Randwerten $A(0) = A(4) = 0$ zeigt, dass $A\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) \approx 49{,}27$ das

absolute Maximum der Zielfunktion ist.

Gesuchte Abmessungen:

$$a = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2{,}3., \quad b = f\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{16}{3}}^{\,2} + 16 = -\frac{16}{3} + 16 = \frac{32}{3}, \qquad A \approx 49{,}27$$

Eckpunkte: $\left(\sqrt{\frac{16}{3}} / 0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{16}{3}} / \frac{32}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{16}{3}} / \frac{32}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{16}{3}} / 0\right)$