Potenzen

Definitionen:

Für $\mathbf{k,\ p,\ q} \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbf{a^k := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k\ \text{Faktoren}}}$$

$$\mathbf{a^1 := a}$$

$$\mathbf{a^0 := 1 \text{ für } a \neq 0 \quad (0^0 \text{ ist nicht definiert})}$$

$$\mathbf{a^{-k} := \frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k}$$

$$\mathbf{a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}} \qquad \mathbf{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a}^{\,p}}$$

Potenzgesetze:

Für $\mathbf{a,\ b,\ x,\ y} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a,\ b \neq 0}$ gilt:

$$\mathbf{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x} \qquad \mathbf{\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x}$$

$$\mathbf{a^x \cdot a^y = a^{x+y}} \qquad \mathbf{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$$

$$\mathbf{(a^x)^y = a^{x \cdot y}}$$

Logarithmen

Definition:

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis a heißt Logarithmusfunktion zur Basis a $\mathbf{(a > 0,\ a \neq 1)}$.

Für $\mathbf{a,\ b > 0,\ a \neq 1}$b>0 ist $\mathbf{\log_a(b)}$ diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten: $\mathbf{\log_a(b) = x \Leftrightarrow a^x = b}$

Insbesondere gilt:

$$\mathbf{a^{\log_a(b)} = b} \qquad \mathbf{\log_a(a^x) = x}$$

$$\mathbf{\log_a(a) = 1} \qquad \mathbf{\log_a(1) = 0}$$

Logarithmengesetze:

Für $\mathbf{a,\ x,\ y} \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{a \neq 1}$ gilt:

$$\mathbf{\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)}$$

$$\mathbf{\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)}$$

$$\mathbf{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)}$$

$$\mathbf{\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)}$$