Handymarkt

Drei Handyunternehmen A, B und C haben den Handymarkt erobert und schließen Jahresverträge mit ihren Kunden ab.

Die Gesamtzahl der Kunden und die Übergangsquoten der jährlich zwischen A, B und C wechselnden Kunden seien langfristig konstant.

Pro Jahr gibt es bei den Handyunternehmen folgende Kundenwechsel:
30% der Kunden von A wechseln zu B und 20% der Kunden von A wechseln zu C.
10% der Kunden von B wechseln zu A und 20% der Kunden von B wechseln zu C.
20% der Kunden von C wechseln zu A und 20% der Kunden von C wechseln zu B.

a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix M für diesen Austauschprozess an, die die jährlichen Übergangsquoten der Kunden enthält.

b) Im Jahr 2015 haben A: 6 Millionen Kunden, B: 20 Millionen Kunden und C: 10 Millionen Kunden.
Berechnen Sie die Kundenverteilungen für die Jahre 2016 und 2017.

c) Bestimmen Sie die Matrix, die die Übergangsquoten für einen Zeitraum von zwei Jahren enthält. Beschreiben Sie, wie man das Matrixelement in der 2. Zeile und dritten Spalte dieser Matrix erhält.

d) Untersuchen Sie, ob es eine stabile Verteilung der insgesamt 36 Millionen Handykunden gibt. Falls ja, geben Sie diese Verteilung an.

e) Bestimmen und berechnen Sie die Kundenverteilung im Jahr 2014.

a)

$$M=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{v}_{2015}=\begin{pmatrix}6\ 000\ 000\\ 20\ 000\ 000\\ 10\ 000\ 000\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{2016}=M\cdot\vec{v}_{2015}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\ 000\ 000\\ 20\ 000\ 000\\ 10\ 000\ 000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\ 000\ 000\\ 17\ 800\ 000\\ 11\ 200\ 000\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{2017}=M\cdot\vec{v}_{2016}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\ 000\ 000\\ 17\ 800\ 000\\ 11\ 200\ 000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7520\ 000\\ 16800\ 000\\ 11680\ 000\end{pmatrix}$$

c)

$$M^2=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}32 & 0{,}16 & 0{,}24\\ 0{,}4 & 0{,}56 & 0{,}32\\ 0{,}28 & 0{,}28 & 0{,}44\end{pmatrix}$$

0,32 ist das Skalarprodukt des 2. Zeilenvektors und des 3. Spaltenvektors von M:

$$0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}06+0{,}14+0{,}12=0{,}32$$

$$M^2\cdot\vec{v}_{2015}=\begin{pmatrix}0{,}32 & 0{,}16 & 0{,}24\\ 0{,}4 & 0{,}56 & 0{,}32\\ 0{,}28 & 0{,}28 & 0{,}44\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\ 000\ 000\\ 20\ 000\ 000\\ 10\ 000\ 000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7520\ 000\\ 16800\ 000\\ 11680\ 000\end{pmatrix}=\vec{v}_{2017}$$

d)

$$M\cdot\vec{x}=\vec{x}\Leftrightarrow(M-E)\cdot\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & -0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}3 & -0{,}3 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}4 & 0\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}\mathrm{I}\\ \mathrm{I}-\mathrm{II}\\ \mathrm{I}+0{,}5\cdot\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0\\ -0{,}8 & 0{,}4 & 0 & 0\\ -0{,}4 & 0{,}2 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}:4\\ \mathrm{III}-0{,}5\cdot\mathrm{II}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0\\ -0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

II: $-0{,}2x+0{,}1y=0\Leftrightarrow 0{,}1y=0{,}2x\Leftrightarrow y=2x$

I: $-0{,}5x+0{,}1\cdot 2x+0{,}2z=0\Leftrightarrow -0{,}3x+0{,}2z=0\Leftrightarrow 0{,}2z=0{,}3x\Leftrightarrow z=1{,}5x$

Stabile Verteilung: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 2x\\ 1{,}5x\end{pmatrix}$ mit $x+2x+1{,}5x=4{,}5x=36\ 000\ 000\Leftrightarrow x=8\ 000\ 000$,

also $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\ 000\ 000\\ 2\cdot 8\ 000\ 000\\ 1{,}5\cdot 8\ 000\ 000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\ 000\ 000\\ 16\ 000\ 000\\ 12\ 000\ 000\end{pmatrix}$

e)

$$\vec{v}_{2014} = M^{-1} \cdot \vec{v}_{2015} = \begin{pmatrix} 4\ 250\ 000 \\ 24\ 750\ 000 \\ 7\ 000\ 000 \end{pmatrix} \quad \text{(Taschenrechner)}$$

$$M \cdot \vec{v}_{2014} = \vec{v}_{2015} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\ 000\ 000 \\ 20\ 000\ 000 \\ 10\ 000\ 000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0,1 & 0,2 & 6\ 000\ 000 \\ 0,3 & 0,7 & 0,2 & 20\ 000\ 000 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 & 10\ 000\ 000 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ \to \quad \text{I} - \text{II} \\ 3 \cdot \text{I} - \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0,1 & 0,2 & 6\ 000\ 000 \\ 0,2 & -0,6 & 0 & -14\ 000\ 000 \\ 1,3 & 0,1 & 0 & 8\ 000\ 000 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ \to \quad \text{II} \\ \text{II} + 6 \cdot \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0,1 & 0,2 & 6\ 000\ 000 \\ 0,2 & -0,6 & 0 & -14\ 000\ 000 \\ 8 & 0 & 0 & 34\ 000\ 000 \end{array}\right)$$

$\text{III}: \; 8x = 34\ 000\ 000$

$\Leftrightarrow x = 4\ 250\ 000$

$\text{II}: \; 0,2 \cdot 4\ 250\ 000 - 0,6y = -14\ 000\ 000$

$\Leftrightarrow 850\ 000 - 0,6y = -14\ 850\ 000$

$\Leftrightarrow -0,6y = -14\ 850\ 000$

$\Leftrightarrow y = 2\ 475\ 000$

$\text{I}: \; 0,5 \cdot 4\ 250\ 000 + 0,1 \cdot 2\ 475\ 000 + 0,2z = 6\ 000\ 000$

$\Leftrightarrow 4\ 600\ 000 + 0,2z = 6\ 000\ 000$

$\Leftrightarrow 0,2z = 1\ 400\ 000$

$\Leftrightarrow z = 7\ 000\ 000$

$$\vec{v}_{2014} = \begin{pmatrix} 4\ 250\ 000 \\ 24\ 750\ 000 \\ 7\ 000\ 000 \end{pmatrix}$$