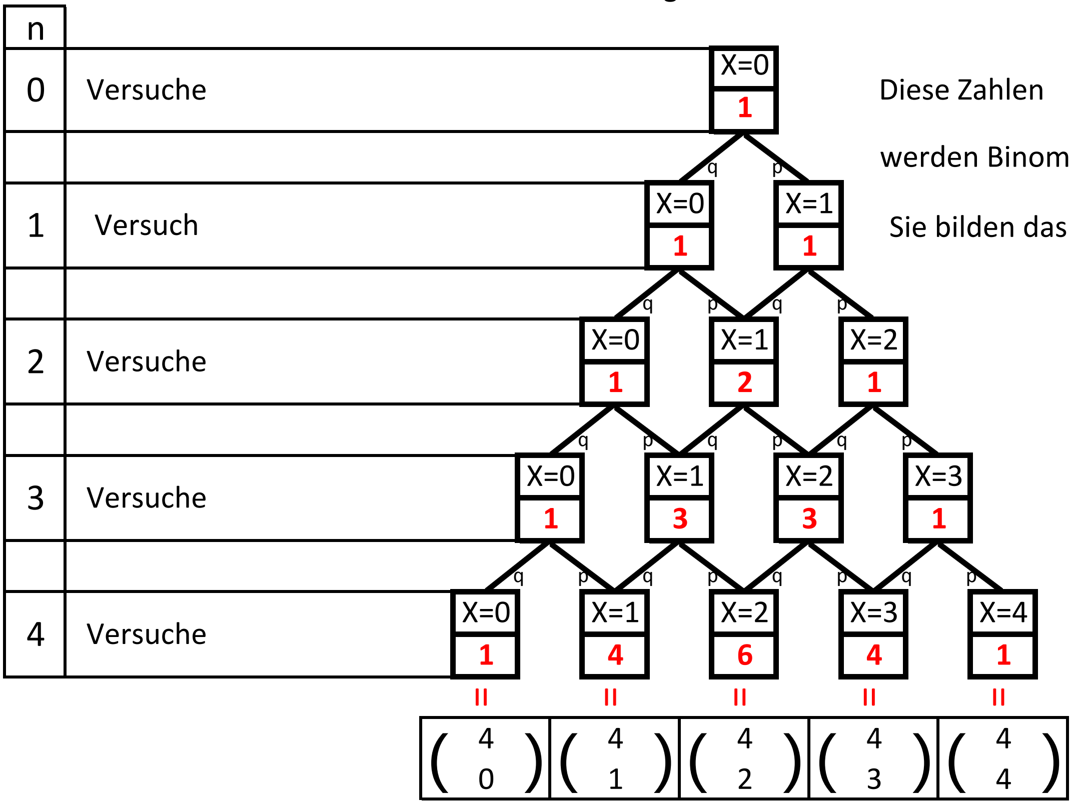
LS-357-2

a) Zeichnen Sie den vollständigen Baum für eine Bernoulli-Kette mit der Länge n = 4.

Bestimmen Sie daran die Binomialkoeffizienten $\binom{4}{r}$ für r = 0, 1, 2, 3, 4.

Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Erfolge bei der Versuchskette.



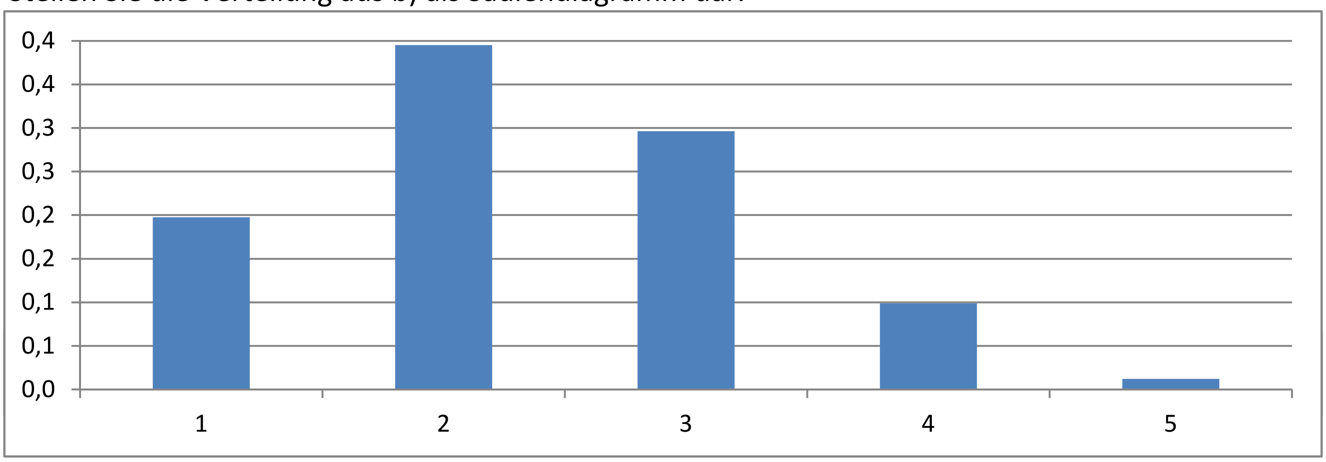
Diese Zahlen $\binom{n}{k}$ (lies "n über k") werden Binomialkoefizienten genannt.

Sie bilden das **Pascalsche Dreieck**.

b) Notieren Sie die Binomialverteilung zu n = 4 und p = 1/3 in Tabellenform.

k	P(X=k)
0	$P(X=0) = \binom{4}{0} * \left(\frac{1}{3}\right)^0 * \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \approx$ 0,198
1	$P(X=1) = \binom{4}{1} * \left(\frac{1}{3}\right)^1 * \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81} \approx$ 0,395
2	$P(X=2) = \binom{4}{2} * \left(\frac{1}{3}\right)^2 * \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81} \approx$ 0,296
3	$P(X=3) = \binom{4}{3} * \left(\frac{1}{3}\right)^3 * \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81} \approx$ 0,099
4	$P(X=4) = \binom{4}{4} * \left(\frac{1}{3}\right)^4 * \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81} \approx$ 0,012

c) Stellen Sie die Verteilung aus b) als Säulendiagramm dar.



LS-358-3

Eine Münze wird sechsmal geworfen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen genau drei Wappen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen mindestens drei Wappen?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen höchstens drei Wappen?

Die Anzahl X der Wappen ist binomialverteilt mit n = 6, p = 1/2, q = 1/2.

k	P(X=k)
0	$P(X=0) = \binom{6}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \approx 0{,}0156$
1	$P(X=1) = \binom{6}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{64} \approx 0{,}0938$
2	$P(X=2) = \binom{6}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64} \approx 0{,}2344$
3	$P(X=3) = \binom{6}{3} * \left(\frac{1}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{64} \approx 0{,}3125$
4	$P(X=4) = \binom{6}{4} * \left(\frac{1}{2}\right)^4 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64} \approx 0{,}2344$
5	$P(X=5) = \binom{6}{5} * \left(\frac{1}{2}\right)^5 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{6}{64} \approx 0{,}0938$
6	$P(X=6) = \binom{6}{6} * \left(\frac{1}{2}\right)^6 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{64} \approx 0{,}0156$

a) P(X=3) = 20/64 = 0,3125.

b) P(X≥3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = (20 + 15 + 6 + 1)/64 = 42/64 = 0,65625

c) P(X≤3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = (1 + 6 + 15 + 20)/64 = 42/64 = 0,65625

LS-358-4

Bei einem Test gibt es acht Fragen mit jeweils drei Antworten, von denen nur eine richtig ist. Eine Testperson kreuzt bei jeder Frage rein zufällig eine Antwort an.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie genau vier richtige Antworten?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie mindestens vier richtige Antworten?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie höchstens drei richtige Antworten?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie mehr als vier richtige Antworten?

Die Anzahl X der richtigen Antworten ist binomialverteilt mit n = 8, p = 1/3, q = 2/3.

k	P(X=k)
0	$P(X=0) = \binom{8}{0} * \left(\frac{1}{3}\right)^{0} * \left(\frac{2}{3}\right)^{8} = \frac{256}{6561} \approx 0{,}0390$
1	$P(X=1) = \binom{8}{1} * \left(\frac{1}{3}\right)^{1} * \left(\frac{2}{3}\right)^{7} = \frac{1024}{6561} \approx 0{,}1561$
2	$P(X=2) = \binom{8}{2} * \left(\frac{1}{3}\right)^{2} * \left(\frac{2}{3}\right)^{6} = \frac{1792}{6561} \approx 0{,}2731$
3	$P(X=3) = \binom{8}{3} * \left(\frac{1}{3}\right)^{3} * \left(\frac{2}{3}\right)^{5} = \frac{1792}{6561} \approx 0{,}2731$
4	$P(X=4) = \binom{8}{4} * \left(\frac{1}{3}\right)^{4} * \left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{1120}{6561} \approx 0{,}1707$
5	$P(X=5) = \binom{8}{5} * \left(\frac{1}{3}\right)^{5} * \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{448}{6561} \approx 0{,}0683$
6	$P(X=5) = \binom{8}{6} * \left(\frac{1}{3}\right)^{6} * \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{112}{6561} \approx 0{,}0171$
7	$P(X=5) = \binom{8}{7} * \left(\frac{1}{3}\right)^{7} * \left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{16}{6561} \approx 0{,}0024$
8	$P(X=6) = \binom{8}{8} * \left(\frac{1}{3}\right)^{8} * \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = \frac{1}{6561} \approx 0{,}0002$

a) P(X=4) = 1120/6561 ≈ 0,17071

b) P(X≥4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) = (1120 + 448 + 112 + 16 + 1)/6561
= 1697/6561 ≈ 0,25865

c) P(X≤3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = (256 + 1024 + 1792 + 1792)/6561
= 4864/6561 ≈ 0,74135

d) P(X>4) = P(X≥5) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) = (448 + 112 + 16 + 1)/6561
= 577/6561 ≈ 0,08794

LS-358-5

Beim maschinellen Abfüllen von Halbliter-Flaschen wird der Sollwert "500 ccm" in der Regel nicht genau eingehalten. Der Hersteller garantiert aber, dass 98% der Flaschen mindestens 495 ccm enthalten.
Von den abgefüllten Flaschen wird eine Stichprobe von 20 Flaschen entnommen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Flaschen weniger als 495 ccm enthalten?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Flaschen weniger als 495 ccm enthalten?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Flaschen weniger als 495 ccm enthalten?

Die Anzahl X der Flaschen, die weniger als 495 ccm enthalten, ist binomialverteilt mit n = 20, p = 2/100, q = 98/100.

k	P(X=k)
0	$P(X=0) = \binom{20}{0} * \left(\frac{2}{100}\right)^{0} * \left(\frac{98}{100}\right)^{20} \approx 0{,}6676$
1	$P(X=1) = \binom{20}{1} * \left(\frac{2}{100}\right)^{1} * \left(\frac{98}{100}\right)^{19} \approx 0{,}2725$
2	$P(X=2) = \binom{20}{2} * \left(\frac{2}{100}\right)^{2} * \left(\frac{98}{100}\right)^{18} \approx 0{,}0528$

a) $P(X=2) \approx 0{,}0528$

b) $P(X\geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X\leq 1)$
$P(X\leq 1) = P(X=0) + P(X=1) \approx 0{,}6676 + 0{,}2725 \approx 0{,}9401$
$P(X\geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X\leq 1) \approx 1 - 0{,}9401 \approx 0{,}0599$

c) $P(X\leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \approx 0{,}6676 + 0{,}2725 + 0{,}0528 \approx 0{,}9929$

LS-358-6

Zur Behandlung einer Krankheit erhalten sechs Patienten ein Medikament, dass erfahrungsg
mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% zurHeilung der Krankheit führt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle Patienten geheilt werden.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau fünf Patienten geheilt werden.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Patient geheilt wird.

Die Anzahl X der geheilten Patienten ist binomialverteilt mit n = 6, p = 7/10, q = 3/10.

k	P(X=k)
6	$P(X=6) = \binom{6}{6} * \left(\frac{7}{10}\right)^{6} * \left(\frac{3}{10}\right)^{0} \approx 0{,}1176$
5	$P(X=5) = \binom{6}{5} * \left(\frac{7}{10}\right)^{5} * \left(\frac{3}{10}\right)^{1} \approx 0{,}3025$
0	$P(X=0) = \binom{6}{0} * \left(\frac{7}{10}\right)^{0} * \left(\frac{3}{10}\right)^{6} \approx 0{,}0007$

a) $P(X=6) \approx 0{,}1176$

b) $P(X=5) \approx 0{,}3025$

c) $P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) \approx 1 - 0{,}0007 \approx 0{,}9993$

LS-358-7

Etwa 20% einer Bevölkerung sind Linkshänder.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter zehn zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerung kein Linkshänder ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter zehn zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerung genau drein Linkshänder sind.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter zehn zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerung mindestens ein Linkshänder ist.

Die Anzahl X der Linkshänder ist binomialverteilt mit n = 10, p = 2/10, q = 8/10.

k	P(X=k)
0	$P(X=0) = \binom{10}{0} * \left(\frac{2}{10}\right)^{0} * \left(\frac{8}{10}\right)^{10} \approx 0{,}1074$
3	$P(X=3) = \binom{10}{3} * \left(\frac{2}{10}\right)^{3} * \left(\frac{8}{10}\right)^{7} \approx 0{,}2013$

a) P(X=0) ≈ 0,2621

b) P(X=3) ≈ 0,2013

c) P(X≥1) = 1 - P(X=0) ≈ 1 - 0,1074 ≈ 0,8926

LS-358-8

Ein Glücksrad (1/4 orange, 3/4 grün) wird sechsmal gedreht.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal grün erscheint?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal orange erscheint?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zweimal grün erscheint?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zweimal orange erscheint?

Die Anzahl Y der Drehungen, bei denen grün erscheint, ist binomialverteilt mit
n = 6, p = 3/4, q = 1/4.

k	P(Y=k)
0	$P(Y=0) = \binom{6}{0} * \left(\frac{3}{4}\right)^{0} * \left(\frac{1}{4}\right)^{6} \approx 0{,}0002$
1	$P(Y=1) = \binom{6}{1} * \left(\frac{3}{4}\right)^{1} * \left(\frac{1}{4}\right)^{5} \approx 0{,}0044$
2	$P(Y=2) = \binom{6}{2} * \left(\frac{3}{4}\right)^{2} * \left(\frac{1}{4}\right)^{4} \approx 0{,}0330$

Die Anzahl X der Drehungen, bei denen orange erscheint, ist binomialverteilt mit
n = 6, p = 1/4, q = 3/4.

k	P(X=k)
0	$P(X=0) = \binom{6}{0} * \left(\frac{1}{4}\right)^{0} * \left(\frac{3}{4}\right)^{6} \approx 0{,}1780$
1	$P(X=1) = \binom{6}{1} * \left(\frac{1}{4}\right)^{1} * \left(\frac{3}{4}\right)^{5} \approx 0{,}3560$
2	$P(X=2) = \binom{6}{2} * \left(\frac{1}{4}\right)^{2} * \left(\frac{3}{4}\right)^{4} \approx 0{,}2966$

a) $P(Y=2) \approx 0{,}0330$

b) $P(X=2) \approx 0{,}2966$

c) $P(Y\leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \approx 0{,}0002 + 0{,}0044 + 0{,}0330 \approx 0{,}0376$

d) $P(X\geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X\leq 1)$
$P(X\leq 1) = P(X=0) + P(X=1) \approx 0{,}1780 + 0{,}3560 \approx 0{,}5340$
$P(X\geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X\leq 1) \approx 1 - 0{,}5340 \approx 0{,}4660$

LS-358-9

Lea und Richard haben lange Elfmeterschießen geübt. Ihre Trefferquoten betragen 80% und 75%.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Lea bei zehn Versuchen mindestens achtmal trifft.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Richard bei sieben Versuchen genau fünfmal oder genau sechsmal trifft.

Die Anzahl X von Leas Treffern ist binomialverteilt mit n = 10, p = 4/5, q = 1/5.

k	P(X=k)
8	$P(X=8) = \binom{10}{8} * \left(\frac{4}{5}\right)^{8} * \left(\frac{1}{5}\right)^{2} \approx 0{,}3020$
9	$P(X=9) = \binom{10}{9} * \left(\frac{4}{5}\right)^{9} * \left(\frac{1}{5}\right)^{1} \approx 0{,}2684$
10	$P(X=10) = \binom{10}{10} * \left(\frac{4}{5}\right)^{10} * \left(\frac{1}{5}\right)^{0} \approx 0{,}1074$

Die Anzahl Y von Richards Treffern ist binomialverteilt mit n = 7, p = 3/4, q = 1/4.

k	P(Y=k)
5	$P(Y=5) = \binom{7}{5} * \left(\frac{3}{4}\right)^{5} * \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \approx 0{,}3115$
6	$P(Y=6) = \binom{7}{6} * \left(\frac{3}{4}\right)^{6} * \left(\frac{1}{4}\right)^{1} \approx 0{,}3115$

a) $P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) \approx 0{,}3020 + 0{,}2684 + 0{,}1074 \approx 0{,}6778$

b) $P(Y=5) + P(Y=6) \approx 0{,}3115 + 0{,}3115 \approx 0{,}6230$

LS-358-10

Jan wirft drei Münzen. Er hat für die Anzahl X der Münzen, die "Wappen" zeigen folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgestellt:

k	0	1	2	3
P(X=k)	25%	25%	25%	25%

a) Beschreiben Sie Jans Gedankenfehler.

b) Geben Sie die richtige Wahrscheinlichkeitsverteilung an.
genau fünfmal oder genau sechsmal trifft.

a) Jan nimmt fälschlicherweise an, das alle vier möglichen Ereignisse gleichwahrscheinlich sind.
Er übersieht dabei, dass zu verschiedenen Ereignissen unterschiedlich viele Pfade führen.

b) Die Anzahl X der Münzen, die "Wappen" zeigen ist binomialverteilt mit n = 3, p = 1/2, q = 1/2.

k	P(X=k)
0	$P(X=0) = \binom{3}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8} \approx 0{,}125$
1	$P(X=1) = \binom{3}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{3}{8} \approx 0{,}375$
2	$P(X=2) = \binom{3}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{3}{8} \approx 0{,}375$
3	$P(X=3) = \binom{3}{3} * \left(\frac{1}{2}\right)^{3} * \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{8} \approx 0{,}125$