Modezeitschriften

Ein Verlag gibt drei verschiedene, monatlich erscheinende Modezeitschriften Arabella, Beate und Claudia, kurz A, B und C heraus. Diese haben zusammen 24 000 Leserinnen, die aber zwischen A, B und C wechseln.

Die Gesamtzahl der Leserinnen und die Übergangsquoten der pro Monat zwischen A, B und C wechselnden Leserinnen seien langfristig konstant.

Die Matrix $M = \begin{pmatrix} 90\% & 5\% & 5\% \\ 5\% & 80\% & 20\% \\ 5\% & 15\% & 75\% \end{pmatrix}$ enthält die monatlichen Übergangsquoten.

a) Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.

b) Im Oktober 2014 wurden von Arabella 10000, von Beate 8000 und von Claudia 6000 Zeitschriften verkauft.
Berechnen Sie die Verkaufszahlen für November und Dezember 2014.

c) Bestimmen sie M^2 und interpretieren Sie die Bedeutung dieser Matrix im Sachzusammenhang.

d) Beschreiben Sie, wie das Matrixelement in der zweiten Zeile und ersten Spalte der Matrix M^2 berechnet wird.

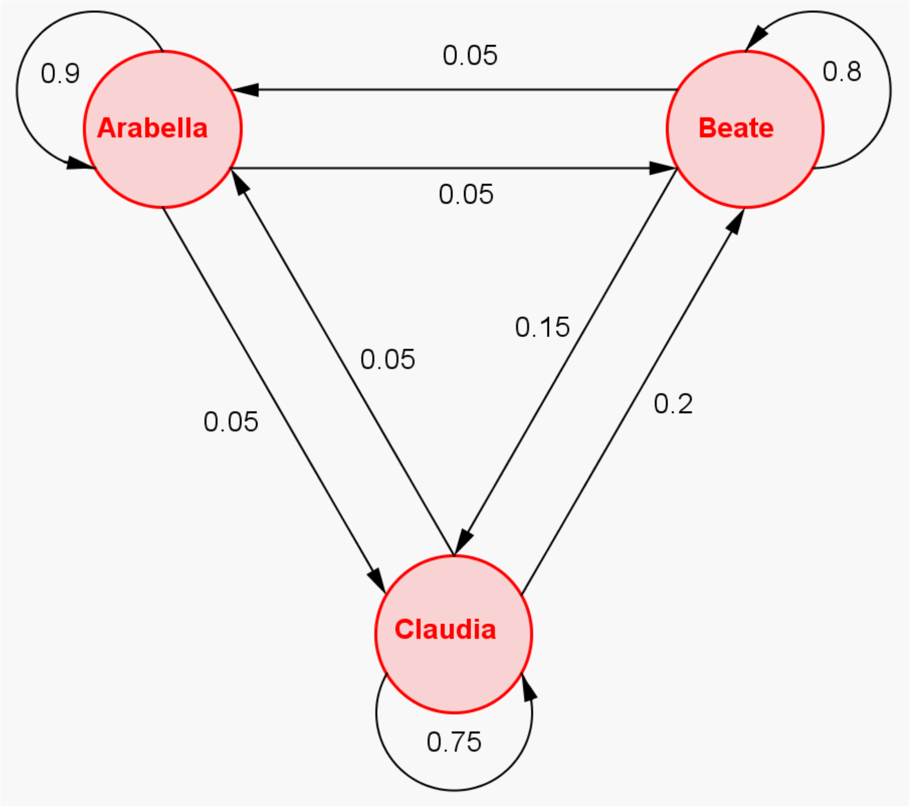
e) Ermitteln Sie die Verkaufszahlen, die sich langfristig einstellen werden.

f) Es gilt: $M^{36} \approx \begin{pmatrix} 0{,}335 & 0{,}332 & 0{,}332 \\ 0{,}374 & 0{,}376 & 0{,}376 \\ 0{,}291 & 0{,}292 & 0{,}292 \end{pmatrix}$

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Matrix im Sachzusammenhang.

g) Bestimmen und berechnen Sie die Verkaufszahlen für September 2014.

a)



b)

$$\vec{v}_{Okt} = \begin{pmatrix} 10\,000 \\ 8\,000 \\ 6\,000 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{Nov} = M \cdot \vec{v}_{Okt} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10\,000 \\ 8\,000 \\ 6\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\,700 \\ 8\,100 \\ 6\,200 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{Dez} = M \cdot \vec{v}_{Nov} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9\,700 \\ 8\,100 \\ 6\,200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\,445 \\ 8\,205 \\ 6\,350 \end{pmatrix}$$

c)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}815 & 0{,}0925 & 0{,}0925 \\ 0{,}095 & 0{,}6725 & 0{,}3125 \\ 0{,}09 & 0{,}235 & 0{,}595 \end{pmatrix}$$

M^2 enthält die Übergangsquoten für einen Zeitraum von zwei Monaten.

Z.B.: $M^2 \cdot \vec{v}_{Okt} = \begin{pmatrix} 0{,}815 & 0{,}0925 & 0{,}0925 \\ 0{,}095 & 0{,}6725 & 0{,}3125 \\ 0{,}09 & 0{,}235 & 0{,}595 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10\,000 \\ 8\,000 \\ 6\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\,445 \\ 8\,205 \\ 6\,350 \end{pmatrix} = \vec{v}_{Dez}$

d) 0,095 ist das Skalarprodukt des 2. Zeilenvektors und des 1. Spaltenvektors von M:

$$0{,}05 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}045 + 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}095$$

e) Langfristig wird sich bei diesem Austauschprozess ein stabiler Zustand einstellen.

$$M\cdot\vec{x}=\vec{x}\Leftrightarrow(M-E)\cdot\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}05\\ 0{,}05 & -0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}05 & 0{,}15 & -0{,}25\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0\\ 0{,}05 & -0{,}2 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}05 & 0{,}15 & -0{,}25 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r}\mathrm{I}\\ \to \mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}\\ \mathrm{I}+2\cdot\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0\\ 0 & -0{,}35 & 0{,}45 & 0\\ 0 & 0{,}35 & -0{,}45 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r}\mathrm{I}\\ \to \quad \mathrm{II}\\ \mathrm{II}+\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0\\ 0 & -0{,}35 & 0{,}45 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\mathrm{II}:\quad -0{,}35y+0{,}45z=0\Leftrightarrow -0{,}35y=-0{,}45z\Leftrightarrow y=\frac{9}{7}z$$

$$\mathrm{I}:\quad -0{,}1x+0{,}05\cdot\frac{9}{7}z+0{,}05z=0\Leftrightarrow -\frac{1}{10}x+\frac{1}{20}\cdot\frac{9}{7}z+\frac{1}{20}z=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{10}x+\frac{4}{35}z=0\Leftrightarrow -\frac{1}{10}x=-\frac{4}{35}z\Leftrightarrow x=\frac{8}{7}z$$

Stabile Verteilung: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{7}z\\ \frac{9}{7}z\\ z\end{pmatrix}$ mit $\frac{8}{7}z+\frac{9}{7}z+z=\frac{24}{7}z=24\ 000\Leftrightarrow z=7\ 000$,

also $\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{8}{7}\cdot 7\ 000\\ \frac{9}{7}\cdot 7\ 000\\ 7\ 000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\ 000\\ 9\ 000\\ 7\ 000\end{pmatrix}$

f) Innerhalb von 36 Monaten hat sich der Austauschprozess schon fast stabilisiert. Die Spaltenvektoren von M^{36} sind ungefähr gleich. Ihre Koordinaten sind annähernd die Marktanteile der entsprechenden Zeitschriften im stabilisierten Zustand:

$$\frac{1}{24\ 000}\cdot\begin{pmatrix}8\ 000\\ 9\ 000\\ 7\ 000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8\ 000}{24\ 000}\\ \frac{9\ 000}{24\ 000}\\ \frac{7\ 000}{24\ 000}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{3}{8}\\ \frac{7}{24}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}333\\ 0{,}375\\ 0{,}292\end{pmatrix}$$

g)

$$\vec{v}_{Sept} = M^{-1} \cdot \vec{v}_{Okt} \approx \begin{pmatrix} 10\ 352{,}9 \\ 7\ 921{,}57 \\ 5\ 725{,}49 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10\ 353 \\ 7\ 922 \\ 5\ 724 \end{pmatrix} \quad \text{(Taschenrechner)}$$

$$M \cdot \vec{v}_{Sept} = \vec{v}_{Okt} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\ 000 \\ 8\ 000 \\ 6\ 000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 & 10\ 000 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}2 & 8\ 000 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}75 & 6\ 000 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ 18 \cdot \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ 18 \cdot \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 & 10\ 000 \\ 0 & 14{,}35 & 3{,}55 & 134\ 000 \\ 0 & 2{,}65 & 13{,}45 & 98\ 000 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ 2{,}65 \cdot \mathrm{II} - 14{,}35 \cdot \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 & 10\ 000 \\ 0 & 14{,}35 & 3{,}55 & 134\ 000 \\ 0 & 0 & -183{,}6 & -1\ 051\ 200 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{III}:\ & 10{,}2z = 58\ 400 \\ & \Leftrightarrow z \approx 5\ 725{,}49 \\ \mathrm{II}:\ & 14{,}35y + 3{,}55 \cdot 5\ 725{,}49 \approx 134\ 000 \\ & \Leftrightarrow 14{,}35y + 20325{,}5 \approx 134\ 000 \\ & \Leftrightarrow 14{,}35y \approx 113674{,}5 \\ & \Leftrightarrow y \approx 7921{,}57 \\ \mathrm{I}:\ & 0{,}9 \cdot x + 0{,}05 \cdot 7921{,}57 + 0{,}05 \cdot 5\ 725{,}49 \approx 10\ 000 \\ & \Leftrightarrow 0{,}9 \cdot x + 682{,}32 \approx 10\ 000 \\ & \Leftrightarrow 0{,}9 \cdot x \approx 9\ 317{,}65 \\ & \Leftrightarrow x \approx 10\ 352{,}94 \end{aligned}$$

$$\vec{v}_{Sept} \approx \begin{pmatrix} 10\ 353 \\ 7922 \\ 5\ 724 \end{pmatrix}$$