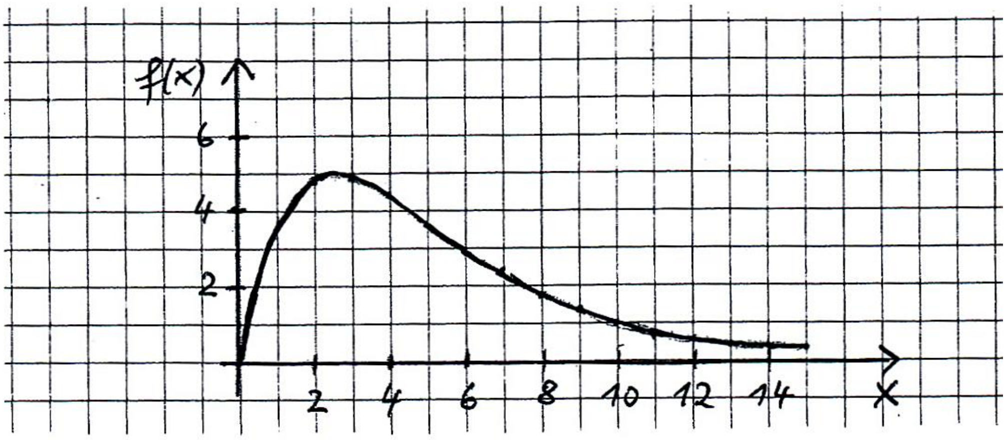
Analysis

Das Wachstum eines bestimmten Strauches wird modellhaft durch die Funktion

$f(x) = 2xe^{1-0{,}4x}$ für $0 \leq x \leq 15$ beschrieben. Dabei gibt x die Zeit seit Beobachtungsbeginn in Jahren und $f(x)$ das Höhenwachstum in Dezimeter pro Jahr an. Der Graph von f ist in der folgenden Abbildung qualitativ dargestellt.



a)– Berechnen Sie das Höhenwachstum 5 Jahre nach Beobachtungsbeginn.

b)– Bestätigen Sie: $f'(x) = (2 - 0{,}8x)e^{1-0{,}4x}$.

c)–Ermitteln Sie rechnerisch das maximale Wachstum in den 15 Jahren der Beobachtung und den Zeitpunkt, an dem dieses maximale Wachstum vorliegt.

d)–Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich das Wachstum am stärksten verlangsamt.

e)–Zeigen Sie: $F(x) = -5 \cdot (x + 2{,}5) \cdot e^{1-0{,}4x}$ ist eine Stammfunktion von f.

f)–Berechnen Sie, wie viel der Strauch im Beobachtungszeitraum durchschnittlich pro Jahr gewachsen ist.

Hinweis: *Der Mittelwert m einer Funktion f im Intervall [a; b] berechnet sich zu* $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

g)–Bestimmen Sie die Höhe des Strauches nach 15 Jahren, wenn er zu Beobachtungsbeginn eine Höhe von 0,5 m hatte.

Lösungen

a) 5 Jahre nach Beobachtungsbeginn beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit
$f(5) \approx 3{,}68$ Dezimeter pro Jahr.

b) $f'(x) = 2e^{1-0{,}4x} + 2x \cdot (-0{,}4)e^{1-0{,}4x} = 2e^{1-0{,}4x} - 0{,}8xe^{1-0{,}4x} = (2-0{,}8x)e^{1-0{,}4x}$

$f''(x) = -0{,}8e^{1-0{,}4x} + (2-0{,}8x) \cdot (-0{,}4)e^{1-0{,}4x} = -0{,}8e^{1-0{,}4x} + (-0{,}8+0{,}32x)e^{1-0{,}4x}$
$= (0{,}32x - 1{,}6)e^{1-0{,}4x}$

$f'''(x) = 0{,}32e^{1-0{,}4x} + (0{,}32x-1{,}6) \cdot (-0{,}4)e^{1-0{,}4x} = 0{,}32e^{1-0{,}4x} + (-0{,}128+0{,}64x)e^{1-0{,}4x}$
$= (0{,}96 - 0{,}128x)e^{1-0{,}4x}$

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-0{,}8x)e^{1-0{,}4x} = 0 \Leftrightarrow 2-0{,}8x = 0 \Leftrightarrow 0{,}8x = 2 \Leftrightarrow x = 2{,}5$

Nur 2,5 kann Extremstelle sein.

$f'(2{,}5) = 0 \wedge f''(2{,}5) \approx -1{,}67 < 0 \Rightarrow 2{,}5$ ist Hochstelle, $f(2{,}5) = 5$ ist lokales Maximum.

Als einziges lokales Extremum ist $f(2{,}5) = 5$ das absolute Maximum von f.

2,5 Jahre nach Beobachtungsbeginn wächst der Strauch am schnellsten.
Die Wachstumsgeschwindigkeit beträgt zu diesem Zeitpunkt 5 Dezimeter pro Jahr.

d) Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem die Ableitung f' ihr absolutes Minimum annimmt.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (0{,}32x - 1{,}6)e^{1-0{,}4x} = 0 \Leftrightarrow 0{,}32x - 1{,}6 = 0 \Leftrightarrow 0{,}32x = 1{,}6 \Leftrightarrow x = 5$

Nur 5 kann Extremstelle von f' sein.

$f''(5) = 0 \wedge f'''(5) \approx 0{,}118 > 0 \Rightarrow 5$ ist Tiefstelle von f'.

Als einziges lokales Extremum ist $f'(5)$ das absolute Minimum von f'.

5 Jahre nach Beobachtungsbeginn nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit am stärksten ab.

f) $F(x) = -5 \cdot (x + 2{,}5)e^{1-0{,}4x} = (-5x - 12{,}5)e^{1-0{,}4x}$

$F'(x) = -5e^{1-0{,}4x} + (-5x - 12{,}5) \cdot (-0{,}4)e^{1-0{,}4x} = 5e^{1-0{,}4x} + (2x+5)e^{1-0{,}4x} = 2xe^{1-0{,}4x} = f(x)$ q.e.d.

g) $m = \frac{1}{15-0} \cdot \int_0^{15} f(x)dx = \frac{1}{15} \cdot [F(15) - F(0)] \approx \frac{-0{,}59 - (-33{,}98)}{15} \approx \frac{33{,}39}{15} \approx 2{,}23$

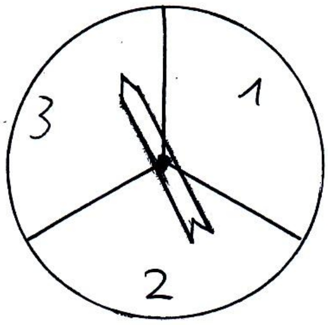
Die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im 15 jährigen Beobachtungszeitraum beträgt ca. 2,23 Dezimeter pro Jahr.

f) $h(15) = h(0) + \int_0^{15} f(x)dx \underset{\text{s.o.}}{\approx} 5 + 33{,}39 \approx 38{,}39$

Nach 15 Jahren ist der Strauch ca. 38,4 Dezimeter hoch.

Stochastik

1.) Bei einer Werbeaktion eines Baumarktes werden die Kunden aufgefordert, ein Glücksrad mit drei gleich großen Feldern zweimal zu drehen. Die Felder sind wie in der Skizze mit den Ziffern 1; 2; 3 beschriftet. Die erreichte Punktsumme in Prozent wird dem glücklichen Kunden als Rabatt gewährt.

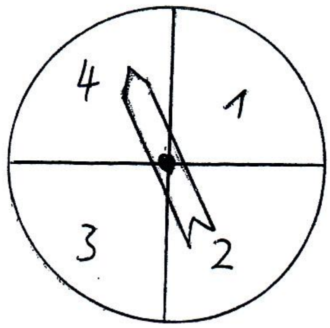


a) – Erläutern Sie, aus welchen Einzelergebnissen sich das Ereignis E „die Punktsumme ist 4" zusammensetzt.

– Bestimmen Sie auch die Wahrscheinlichkeit P(E) für dieses Ereignis.

b) – Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße X = Punktsumme.

c) Bei einer ähnlichen Aktion wurde ein Glücksrad mit vier gleich großen Feldern und den Ziffern 1; 2; 3; 4 verwendet. Für die Wahrscheinlichkeitsgröße X = Punktsumme nach zweimaligem Drehen ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:



k	2	3	4	5	6	7	8
P(X=k)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

– Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X ~~und die Standardabweichung~~.

– Erklären Sie die konkrete Bedeutung des Erwartungswertes ~~und der Standardabweichung~~ im Sachzusammenhang.

2.) Berechnen Sie für eine Bernoulli-Kette der Länge n=5 mit der Trefferwahrscheinlichkeit p=0,15 die binomialen Einzelwahrscheinlichkeiten und die summierten Wahrscheinlichkeiten und stellen Sie damit die vollständigen Tabellen a) und b) auf :

a) für die bin. Einzelwahrscheinlichkeiten: b)für die summierten bin. Wahrscheinlichkeiten:

3.) Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n= 50 mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,3.

– Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) P(X=17) b) P(X≤ 25) c) P< 28)

d) P(10≤X≤20) e) P(X>22)

4.) In einem fernen Land haben 40% der Bevölkerung die Blutgruppe A.

Bei einer Reihenuntersuchung werden 50 Personen auf ihre Blutgruppe untersucht.

– Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 50 Personen

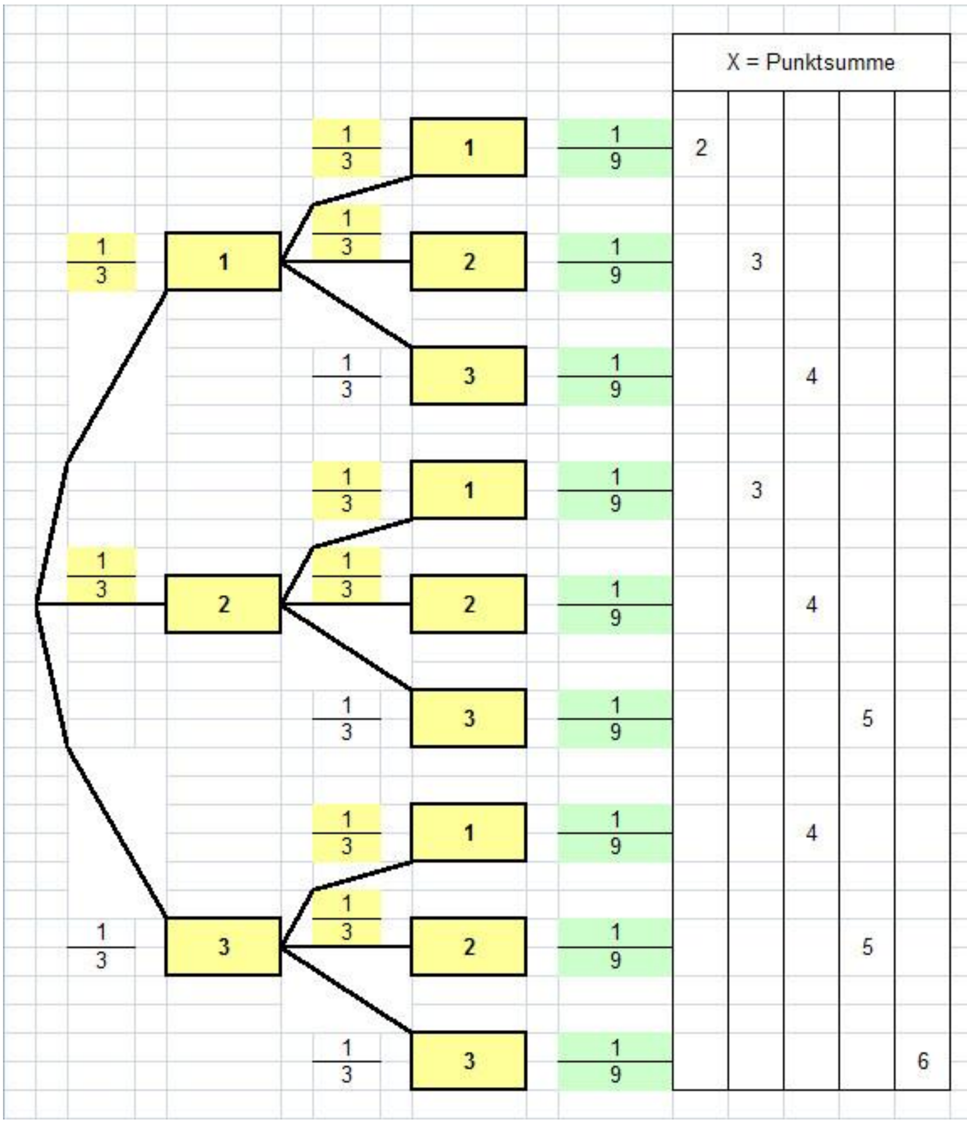
a) genau 12 b) höchstens 15

c) mindestens 20 d) mindestens 10, aber höchstens 25

die Blutgruppe A haben.

Lösungen

1a)



Das Ereignis E: „die Punktsumme ist 4“ $(X = 4)$ setzt sich aus den Ergebnissen (1/3), (2/2) und (3/1) zusammen. $P(E) = P(X = 4) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b)

k	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

c)

k	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8} = \frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8} = \frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
$k \cdot P(X = k)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{20}{16}$	$\frac{18}{16}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{8}{16}$

$$\mu = 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + ... + 8 \cdot P(X = 8) = \frac{2 + 6 + 12 + 20 + 18 + 14 + 8}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

Im Mittel erreichen die Kunden bei diesem Glücksrad die Punktsumme 5.
Der Baumarkt muss damit kalkulieren, dass im Schnitt 5% Rabatt gewährt werden.

2 a) b)

k	$P(X=k)$	$P(X\le k)$
0	$P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot 0{,}15^0\cdot 0{,}85^5=0{,}85^5\approx 0{,}4437$	$\approx$ 0,4437
1	$P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot 0{,}15^1\cdot 85^4=5\cdot 0{,}15\cdot 0{,}85^4\approx 0{,}3915$	$\approx$ 0,8352
2	$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}15^2\cdot 0{,}85^3=10\cdot 0{,}15^2\cdot 0{,}85^3\approx 0{,}1382$	$\approx$ 0,9734
3	$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}15^3\cdot 0{,}85^2=10\cdot 0{,}15^3\cdot 0{,}85^2\approx 0{,}0244$	$\approx$ 0,9978
4	$P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot 0{,}15^4\cdot 0{,}85^1=5\cdot 0{,}15^4\cdot 0{,}85\approx 0{,}0022$	$\approx$ 1,0000
5	$P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot 0{,}15^5\cdot 0{,}85^0=0{,}15^5\approx 0{,}0001$	$\approx$ 1,0001 Fehler durch Rundung

3 Wahrscheinlichkeitsbestimmung mittels kumulierter Wahrscheinlichkeitstabelle:
$n=50$ und $p=0{,}3$

a) $P(X=17)=P(X\le 17)-P(X\le 16)\approx 0{,}7822-0{,}6839\approx 0{,}0983$

b) $P(X\le 25)\approx 0{,}9991$

c) $P(X<28)=P(X\le 27)\approx 0{,}9999$

d) $P(10\le X\le 20)=P(X\le 20)-P(X\le 9)\approx 0{,}9522-0{,}0402\approx 0{,}9120$

e) $P(X>22)=1-P(X\le 22)\approx 1-0{,}9877\approx 0{,}0123$

4 Die Anzahl X der Personen mit Blutgruppe A ist binomialverteilt mit $n=50$ und $p=0{,}4$.
Wahrscheinlichkeitsbestimmung mittels kumulierter Wahrscheinlichkeitstabelle:

a) $P(X=12)=P(X\le 12)-P(X\le 11)\approx 0{,}0133-0{,}0057\approx 0{,}0076$

b) $P(X\le 15)\approx 0{,}0955$

c) $P(X\ge 20)=1-P(X\le 19)\approx 1-0{,}4465\approx 0{,}5535$

d) $P(10\le X\le 25)=P(X\le 25)-P(X\le 9)\approx 0{,}9427-0{,}0008\approx 0{,}9419$