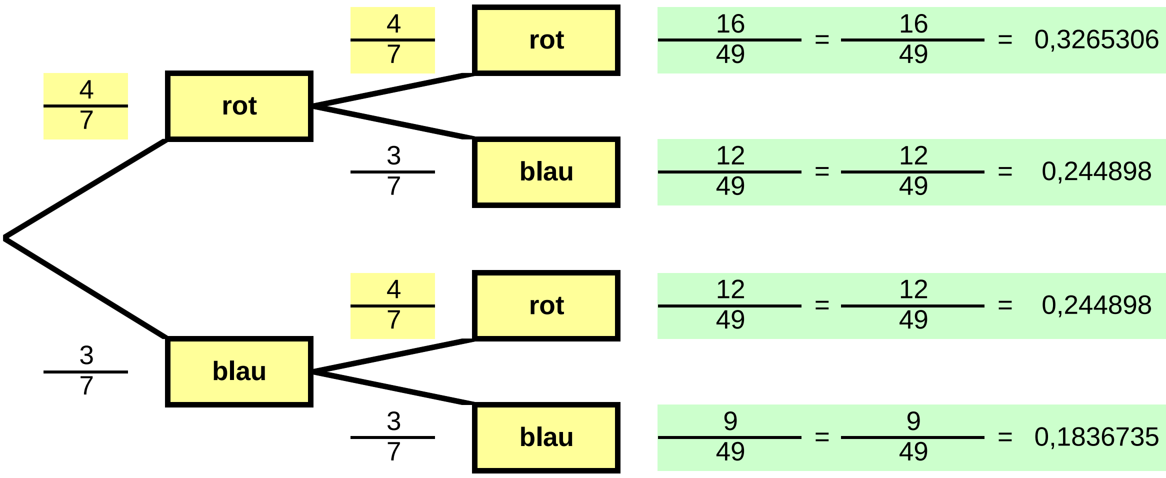
LS-339-1

Eine Schale enthält vier rote und drei blaue Kugeln.
Es werden blind zwei Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen.



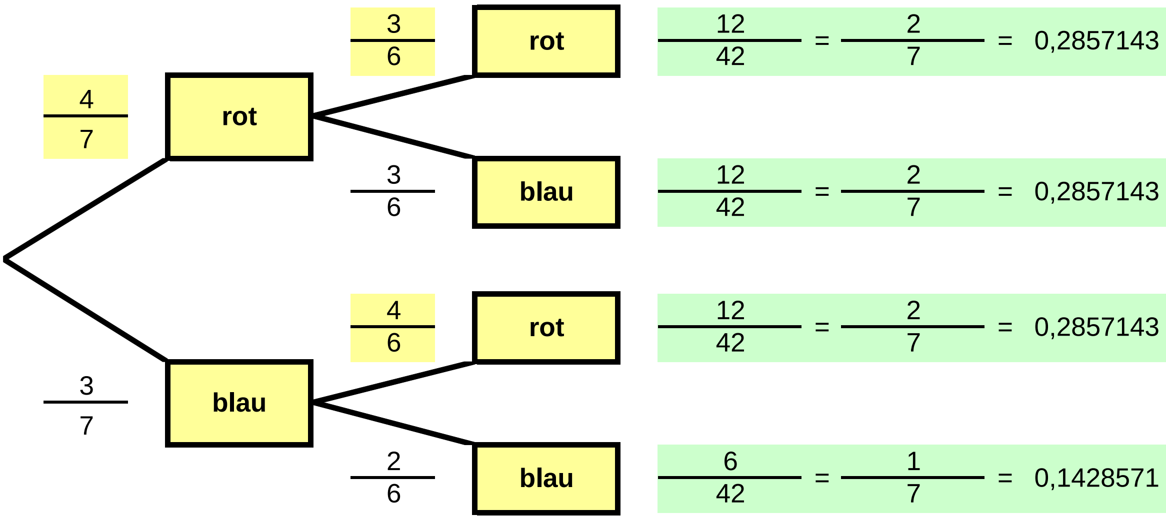
a) P(zwei rote) = P((r,r)) = 16/49

b) P(eine rote) = P((r,b)) + P((b,r)) = 12/49 + 12/49 = 24/49

c) P(mindestens eine rote) = P((r,r)) + P((r,b)) + P((b,r)) = 16/49 + 12/49 + 12/49 = 40/49
P(mindestens eine rote) = 1 - P(keine rote) = 1 - P((b,b)) = 1 - 9/49 = 40/49

d) P(höchstens eine blaue) = P(mindestens eine rote) = 40/49

Eine Schale enthält vier rote und drei blaue Kugeln.
Es werden blind zwei Kugeln **ohne Zurücklegen** gezogen.



a) P(zwei rote) = P((r,r)) = 2/7

b) P(eine rote) = P((r,b)) + P((b,r)) = 2/7 + 2/7 = 4/7

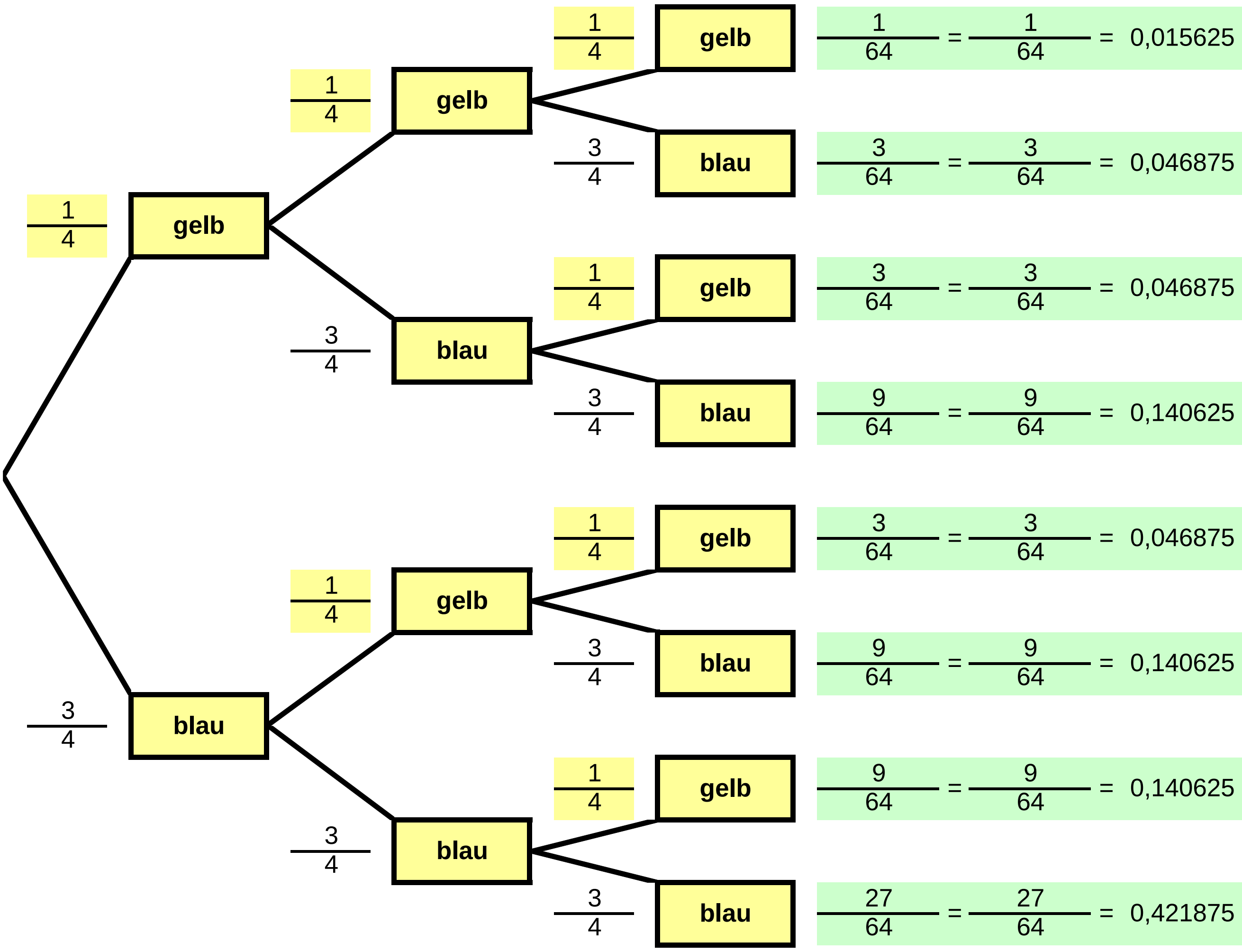
c) P(mindestens eine rote) = P((r,r)) + P((r,b)) + P((b,r)) = 2/7 + 2/7 + 2/7 = 6/7
P(mindestens eine rote) = 1 - P(keine rote) = 1 - P((b,b)) = 1 - 1/7 = 6/7

d) P(höchstens eine blaue) = P(mindestens eine rote) = 6/7

LS-339-2

Ein Glücksrad (1/4 gelb, 3/4 blau) wird dreimal gedreht.

Geben Sie die Ergebnismenge an.
Ω = {(g,g,g), (g,g,b), (g,b,g), (g,b,b), (b,g,g), (b,g,b), (b,b,g), (b,b,b)}



a) P(dreimal gelb) = P((g,g,g)) = 1/64

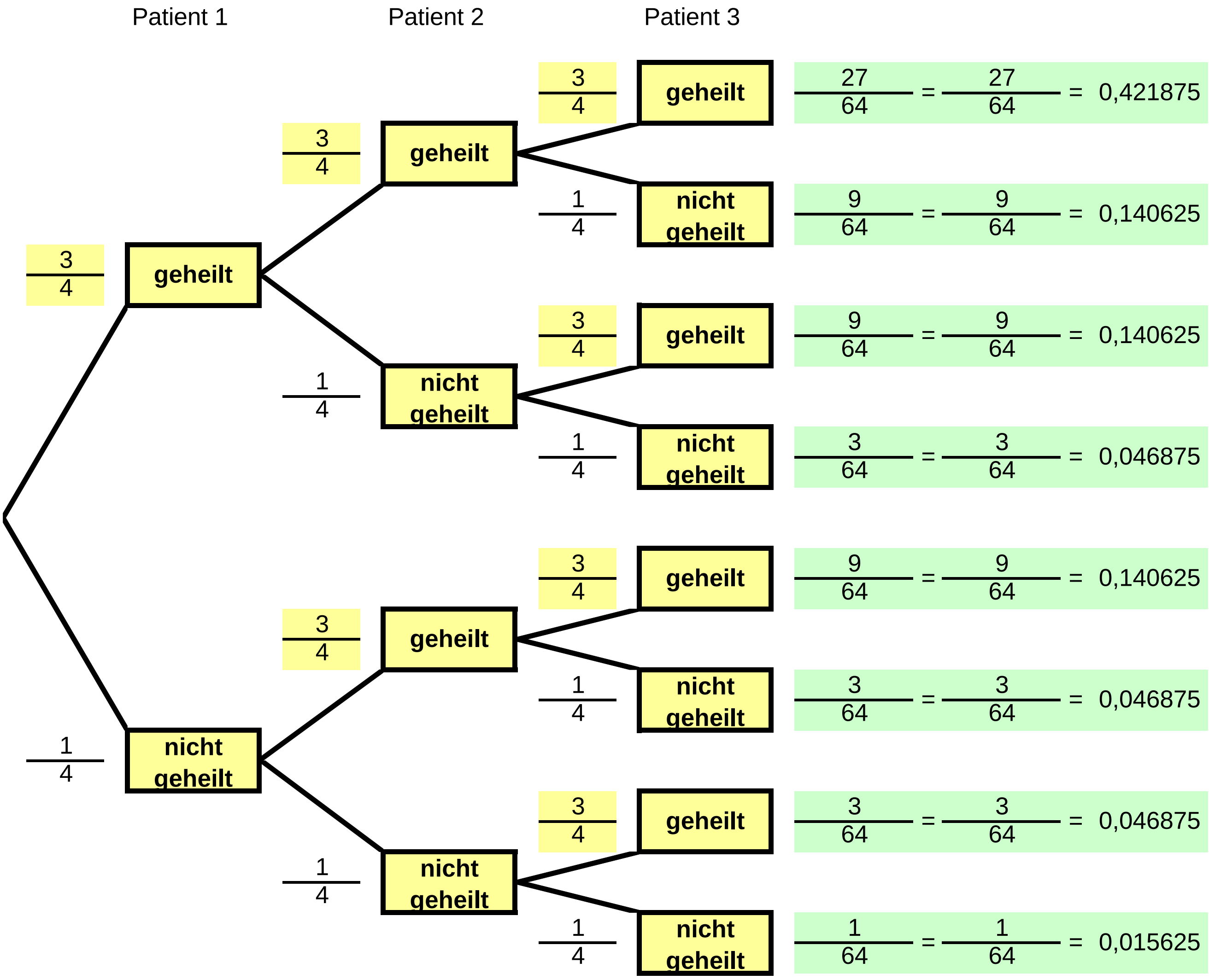
b) P(genau einmal blau) = P((g,g,b)) + P((g,b,g)) + P((b,g,g)) = 3 * 3/64 = 9/64

c) P(mindestens einmal gelb) = 1 - P(keinmal gelb) = 1 - P((b,b,b)) = 1 - 27/64 = 37/64

d) P(mindestens zweimal blau) = P(zweimal blau) + P(dreimal blau)
= P((g,b,b)) + P((b,g,b)) + P((b,b,g)) + P((b,b,b))
= 3 * 9/64 + 27/64 = 54/64

LS-339-3

Von einem Medikament ist bekannt, dass es in 3/4 aller Fälle eine Krankheit heilt.
Drei Patienten werden damit behandelt.



a) P(kein Patient geheilt) = P((ng,ng,ng)) = 1/64
Gegenereignis: mindestens ein Patient geheilt

b) P(genau ein Patuent wird geheilt) = P((g,ng,ng)) + P((ng,g,ng)) + P((ng,ng,g)) = 3 * 3/64 = 9/64
Gegenereignis: kein Patient oder zwei Patienten oder alle drei Patienten geheilt

c) P(genau ein Patient nicht geheilt) = P((g,g,ng)) + P((g,ng,g)) + P((ng,ng,g)) = 3 * 9/64 = 27/64
Gegenereignis: kein Patient oder zwei Patienten oder alle drei Patienten nicht geheilt

d) P(höchstens zwei Patienten geheilt) = 1 - P(alle drei Patienten geheilt) = 1 - P((g,g,g)) = 1 - 27/64 = 37/64
Gegenereignis: alle drei Patienten geheilt

LS-339-4

Bei einem Spiel erhält man eine Punktzahl nach folgendem Verfahren:
Man würfelt mit zwei Würfeln und nimmt die kleinere der auftretenden Augenzahlen als Punktzahl.
Bei gleichen Augenzahlen nimmt man diese.
Zufallsvariable: X = Minimum der beiden Augenzahlen

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Zufallsexperiment an.

P(X = 1) = P((1,1)) + P((1,2)) + P((1,3)) + P((1,4)) + P((1,5)) + P((1,6))
+ P((2,1)) + P((3,1)) + P((4,1)) + P((5,1)) + P((6,1)) = 11/36

P(X = 2) = P((2,2)) + P((2,3)) + P((2,4)) + P((2,5)) + P((2,6))
+ P((3,2)) + P((4,2)) + P((5,2)) + P((6,2)) = 9/36

P(X = 3) = P((3,3)) + P((3,4)) + P((3,5)) + P((3,6))
+ P((4,3)) + P((5,3)) + P((6,3)) = 7/36

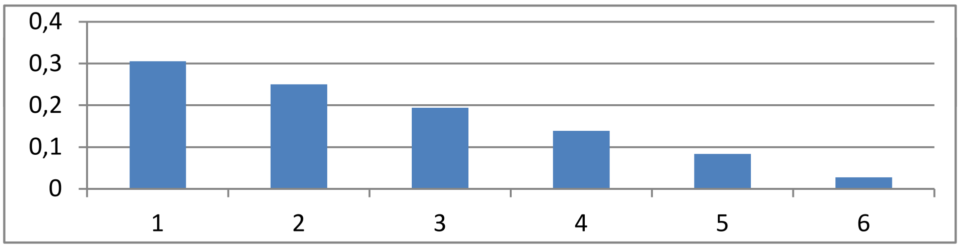
P(X = 4) = P((4,4)) + P((4,5)) + P((4,6))
+ P((5,4)) + P((6,5)) = 5/36

P(X = 5) = P((5,5)) + P((5,6))
+ P((6,5)) = 3/36

P(X = 6) = P((6,6)) = 1/36

b) Skizzieren Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

X	P(X)
1	11/36
2	1/4
3	7/36
4	5/36
5	1/12
6	1/36



LS-340-5

In einer Schale liegen sechs Kugeln.
Zwei tragen die Nummer 1, eine die Nummer 2, zwei die Nummer 3 und eine die Nummer 4.
Zwei Kugeln werden blind **mit Zurücklegen** gezogen.

P(1) = P(3) = 2/6 = 1/3, P(2) = P(4) = 1/6

P((1,1)) = P((1,3)) = P((3,1)) = P((3,3)) = 1/3 * 1/3 = 1/9
P((1,2)) = P((2,1)) = P((1,4)) = P((4,1)) = P((3,2)) = P((2,3)) = P((3,4)) = P((4,3)) = 1/3 * 1/6 = 1/18
P((2,2)) = P((2,4)) = P((4,2)) = P((4,4)) = 1/6 * 1/3 = 1/36

Betrachten Sie die Ereignisse
E: Die Summe der Zahlen auf den gezogenen Kugeln beträgt höchstens 3.
F = {(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)}

a) Geben Sie E in Mengenschreibweise an.
E = {(1,1), (1,2), (2,1)}

Beschreiben Sie F in Worten.
F: Die zweite gezogene Kugel trägt die Nummer 1.

Beschreiben Sie das Gegenereignis von E in Worten.
E_{quer}: Die Summe der Zahlen auf den gezogenen Kugeln ist größer als 3.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten von E und F.

P(E) = P((1,1)) + P((1,2)) + P((2,1)) = 1/9 + 2 * 1/18 = 2/9

P(F) = P(zweite gezogene Kugel trägt die Nummer 1) = P(1) = 1/3

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
dass die Summe der Zahlen auf den gezogenen Kugeln höchstens 3 beträgt
und dass man ein Ergebnis aus F erhält?

E ∩ F = {(1,1), (2,1)}
P(E ∩ F) = P((1,1)) + P((2,1)) = 1/9 + 1/18 = 1/6

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten von E U F.

P(E U F) = P(E) + P(F) - P(E ∩ F) = 2/9 + 1/3 - 1/6 = 7/18

E U F = {(1,1), (1,2), (2,1), (3,1), (4,1)}
P(E U F) = P((1,1)) + P((1,2)) + P((2,1)) + P((3,1)) + P((4,1)) = 1/9 + 1/18 + 1/18 + 1/9 + 1/18 = 7/18

LS-340-6

Dirk Nowitzki trifft beim Basketball-Freiwurf mit der Wahrscheinlichkeit 9/10.
Er macht drei Freiwürfe.

a) Geben Sie die Ergebnismenge sowie eine Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

Ω = {(T,T,T), (T,T,N), (T,N,T), (T,N,N), (N,T,T), (N,T,N), (N,N,T), (N,N,N)}

P((T,T,T)) = 9/10 * 9/10 * 9/10 = 729/1000
P((T,T,N)) = P((T,N,T)) = P((N,T,T)) = 9/10 * 9/10 * 1/10 = 81/1000
P((T,N,N)) = P((N,N,N)) = P((N,N,T)) = 9/10 * 1/10 * 1/10 = 9/1000
P((N,N,N)) = 1/10 * 1/10 * 1/10 = 1/1000

e	(T,T,T)	(T,T,N)	(T,N,T)	(T,N,N)	(N,T,T)	(N,T,N)	(N,N,T)	(N,N,N)
P(e)	729/1000	81/1000	81/1000	9/1000	81/1000	9/1000	9/1000	1/1000

b) Geben Sie das Ereignis E: mindestens zwei Treffer als Menge an und bestimmen Sie P(E).

E = {(T,T,T), (T,T,N), (T,N,T), (N,T,T)}

P(E) = 729/1000 + 3 * 81/1000 = 972/1000 = 97,2%

Beschreiben Sie das Gegenereignis von E in Worten und geben Sie $P(E_{quer})$ an.

E_{quer}: höchstens ein Treffer / weniger als zwei Treffer

$P(E_{quer})$ = 1 - P(E) = 1 - 972/1000 = 28/1000 = 2,8%

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Nowitzki höchstens zweimal trifft?

P(höchstens zwei Treffer) = 1 - P(drei Treffer) = 1 - P((T,T,T)) = 1 - 729/1000 = 271/1000 = 27,1%

LS-340-7

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei fünf Würfen mit einem Würfel

a) mindestens eine sechs zu werfen?

   P(mindestens eine sechs) = 1 - P(keine sechs) = 1 - $(1/6)^5$ = 7775/7776 ≈ 0,99987

b) lauter verschiedene Augenzahlen zu erhalten?

   P(lauter verschiedene Augenzahlen)
   = 5! * [P((1,2,3,4,5)) + P((1,2,3,4,6)) + P((1,2,3,5,6)) + P((1,2,4,5,6)) + P((1,3,4,5,6)) + P((2,3,4,5,6))]
   = 5! *6 * (1/6)^5 = 5/54 ≈ 0,0923

c) Die erste sechs beim fünften Wurf zu erzielen?

   P(erste sechs beim fünften Wurf) = $(5/6)^4$ * 1/6 = 625/7776 ≈ 0,08

LS-340-8

Die Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt beträgt 0,515.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt eine Familie mit fünf Kindern

a) nach vier Söhnen eine Tochter?

$P((S,S,S,S,T)) = 0{,}515^4 * 0{,}485 \approx 0{,}0341$

b) nach vier Töchtern einen Soh?

$P((T,T,T,T,S)) = 0{,}485^4 * 0{,}515 \approx 0{,}0285$

c) 4 Söhne

$P(4\text{ Söhne}) = 5 * P((S,S,S,S,T)) = 5 * 0{,}515^4 * 0{,}485 \approx 0{,}1706$

4 Töchter

$P(4\text{ Töchter}) = 5 * P((T,T,T,T,S)) = 5 *0{,}485^4 * 0{,}515 \approx 0{,}1425$

d) abwechselnd Söhne und Töchter

P(abwechselnd Söhne und Töchter) = P((S,T,S,T,S)) + P((T,S,T,S,T))
= 0,515^3 * 0,485^2 + 0,515^2 * 0,485^3 ≈ 0,0624

LS-340-9

Lotto "6 aus 49"

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige?

P(6 Richtige) = 6! * 1/49 * 1/48 * 1/47 * 1/46 * 1/45 * 1/44 = 1/13983816 ≈ 7,15 * 10^-8

$$P(6\ \text{Richtige}) = \binom{49}{6}^{-1} = 13983816^{-1} = 1/13983816 \approx 7{,}15 * 10^{-8}$$

b) Eine Ziehung mit sechs aufeinanderfolgenden Zahlen heiß "Sechsling".
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sechsling?

P(Sechsling)
= 6! * [P((1,2,3,4,5,6)) + P((2,3,4,5,6,7)) + P((3,4,5,6,7,8)) + … + P((44,45,46,47,48,49))]
= 44 * 6! * P((1,2,3,4,5,6)) = 44 * 1/13983816 = 1/317814 ≈ 3,14655 * 10^-6

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für null Richtige?

P(0 Richtige) = 43/49 * 42/48 * 41/47 * 40/46 * 39/45 * 38/44 ≈ 0,4360

$$P(k\ \text{Richtige}) = \frac{\binom{6}{k} * \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

LS-340-10

a) Ein Atom eines radioaktiven Stoffes zerfällt im Laufe eines Tages mit der Wahrscheinlichkeit 0,15.
Anfangs sind von dem Stoff 100% vorhanden.
Wie viel Prozent sind nach 10 Tagen noch da?

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Atom im Laufe eines Tages nicht zerfällt beträgt 0,85
$0{,}85^{10} \approx 0{,}1969$
Nach 10 Tagen sind noch ca. 19,7% des Stoffes vorhanden.

Bestimmen Sie die Halbwertszeit (die Zeit, in der 50% des Stoffes zerfallen).

$0{,}85^t = 0{,}5 \leftrightarrow t = \log_{0{,}85}(0{,}5) \approx 4{,}265$

Die Halbwertszeit beträgt 4,265 Tage.

b) Jod-131 besitzt eine Halbwertszeit von acht Tagen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jod-131-Atom in den nächsten 24 Stunden zerfällt?

$(1 - p)^8 = 0{,}5 \quad \leftrightarrow \quad (1 - p) = 0{,}5^{1/8} \approx 0{,}917 \quad \leftrightarrow \quad p \approx 0{,}083$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jod-131-Atom in den nächsten 24 Stunden zerfällt, beträgt ca. 8,3%.