Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer Binomialverteilung

Bei einem n-stufigen Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und der Misserfolgswahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ hat die Zufallsgröße X: Anzahl der Erfolge den Erwartungswert $\mu = n \bullet p$,
die Varianz $V(X) = n \bullet p \bullet q$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \bullet p \bullet q}$.

Beweis:

Für Binomialkoeffizienten gilt: $$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \bullet \binom{n-1}{k-1} \qquad (1)$$

Nach dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$(p+q)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \bullet p^i \bullet q^{n-i}, \quad \text{bzw.:} \quad (p+q)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \bullet p^i \bullet q^{n-1-i} \qquad (2)$$

Daraus ergibt sich:

Der Erwartungswert einer Binomialverteilung

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} k \bullet P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \bullet \binom{n}{k} \bullet p^k \bullet q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \bullet \binom{n}{k} \bullet p^k \bullet q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \bullet \binom{n}{k} \bullet p^k \bullet q^{n-k} \underbrace{=}_{(1)} \sum_{k=1}^{n} k \bullet \frac{n}{k} \bullet \binom{n-1}{k-1} \bullet p^k \bullet q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \bullet \binom{n-1}{k-1} \bullet p^k \bullet q^{n-k} = n \bullet p \bullet \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \bullet p^{k-1} \bullet q^{n-k} \qquad \begin{bmatrix} k = i+1 \\ i = k-1 \end{bmatrix}$$

$$= n \bullet p \bullet \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \bullet p^i \bullet q^{n-(i+1)} = n \bullet p \bullet \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \bullet p^i \bullet q^{n-1-i)} \qquad \begin{bmatrix} k = i+1 \\ i = k-1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{(2)} n \bullet p \bullet (p+q)^{n-1} = n \bullet p \bullet 1^{n-1} = n \bullet p, \quad \text{qed.}$$

Es gilt also: $$\sum_{i=0}^{n} i \bullet \binom{n}{i} \bullet p^i \bullet q^{n-i} = n \bullet p$$

bzw.: $$\sum_{i=0}^{n-1} i \bullet \binom{n-1}{i} \bullet p^i \bullet q^{n-1-i} = (n-1) \bullet p \qquad (3)$$

Damit erhält man:

Die Varianz einer Binomialverteilung

$$V(X) = \sum_{k=0}^{n} (k-\mu)^2 \bullet P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k^2 - 2 \bullet k \bullet \mu + \mu^2) \bullet P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \bullet P(X=k) - 2 \bullet \mu \sum_{k=0}^{n} k \bullet P(X=k) + \mu^2 \bullet \sum_{k=0}^{n} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \bullet P(X=k) - 2 \bullet \mu \bullet \mu + \mu^2 \bullet 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \bullet P(X=k) - \mu^2$$

$$\underbrace{=}_{(3)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \bullet \binom{n}{k} \bullet p^k \bullet q^{n-k} - (n \bullet p)^2$$

$$\underbrace{=}_{(1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \bullet \frac{n}{k} \bullet \binom{n-1}{k-1} \bullet p^k \bullet q^{n-k} - n^2 \bullet p^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \bullet n \bullet \binom{n-1}{k-1} \bullet p^k \bullet q^{n-k} - n^2 \bullet p^2$$

$$= n \bullet p \bullet \left[\sum_{k=1}^{n} k \bullet \binom{n-1}{k-1} \bullet p^{k-1} \bullet q^{n-k} - n \bullet p\right] \qquad \begin{bmatrix} k = i+1 \\ i = k-1 \end{bmatrix}$$

$$= n \bullet p \bullet \left[\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \bullet \binom{n-1}{i} \bullet p^i \bullet q^{n-(i+1)} - n \bullet p\right] \qquad \begin{bmatrix} k = i+1 \\ i = k-1 \end{bmatrix}$$

$$= n \bullet p \bullet \left[\sum_{i=0}^{n-1} i \bullet \binom{n-1}{i} \bullet p^i \bullet q^{n-1-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \bullet p^i \bullet q^{n-1-i} - n \bullet p\right]$$

$$\underbrace{=}_{(3),(1)} n \bullet p \bullet [(n-1) \bullet p + (p+q)^{n-1} - n \bullet p]$$

$$= n \bullet p \bullet [n \bullet p - p + 1 - n \bullet p]$$

$$= n \bullet p \bullet [1 - p]$$

$= n \bullet p \bullet q$ qed.