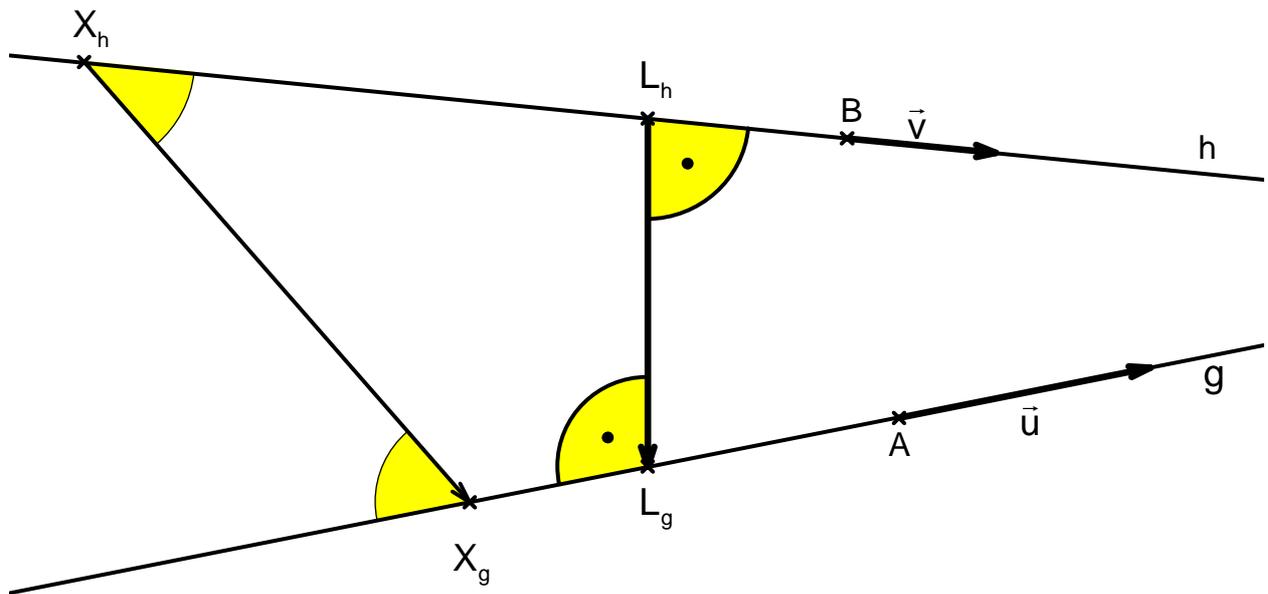


Abstand der windschiefen Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + s\vec{v}$



Man betrachtet den Verbindungsvektor von einem beliebigen Punkt X_h der Geraden h zu einem beliebigen Punkt X_g der Geraden g :

$$\overrightarrow{X_h X_g} = \vec{x}_g - \vec{x}_h = (\vec{a} + r\vec{u}) - (\vec{b} + s\vec{v}) = r\vec{u} - s\vec{v} + \vec{a} - \vec{b}$$

Die Länge dieses Verbindungsvektors ist genau dann der Abstand der windschiefen Geraden g und h , wenn der Vektor $\overrightarrow{X_h X_g}$ orthogonal zu beiden Geraden ist:

$$d(g;h) = \left| \overrightarrow{X_h X_g} \right| \Leftrightarrow \overrightarrow{X_h X_g} \perp g \wedge \overrightarrow{X_h X_g} \perp h \Leftrightarrow \overrightarrow{X_h X_g} \perp \vec{u} \wedge \overrightarrow{X_h X_g} \perp \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{X_h X_g} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{X_h X_g} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (r\vec{u} - s\vec{v} + \vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{u} = 0 \\ (r\vec{u} - s\vec{v} + \vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r\vec{u} \cdot \vec{u} - s\vec{v} \cdot \vec{u} + (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{u} = 0 \\ r\vec{u} \cdot \vec{v} - s\vec{v} \cdot \vec{v} + (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r\vec{u} \cdot \vec{u} - s\vec{v} \cdot \vec{u} = -(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{u} \\ r\vec{u} \cdot \vec{v} - s\vec{v} \cdot \vec{v} = -(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} r = \dots =: r_L \\ s = \dots =: s_L \end{cases}$$

Mit diesen Lösungen r_L und s_L berechnen sich

- die Ortsvektoren der Lotfußpunkte L_g und L_h zu:

$$\vec{l}_g = \vec{a} + r_L \cdot \vec{u} \quad \text{und} \quad \vec{l}_h = \vec{b} + s_L \cdot \vec{v}$$

- der Abstand der windschiefen Geraden g und h zu:

$$d(g;h) = \left| \overrightarrow{L_h L_g} \right| = \left| \vec{l}_g - \vec{l}_h \right| = \left| r_L \cdot \vec{u} - s_L \cdot \vec{v} + \vec{a} - \vec{b} \right|$$