Die Regressionsgerade einer Punktwolke $A_i(x_i / y_i)$, $1 \le i \le n$

Definition:
Die Regressionsgerade geht durch den Schwerpunkt $M(\bar{x} / \bar{y})$ der Punktwolke.
Ihre Steigung m ist dadurch bestimmt, dass die Summe der quadratischen Abweichungen $\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i) - y_i\right]^2$ minimal ist.

Satz:

Die Regressionsgerade bezüglich y hat die Steigung $m = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}$

und den y-Achsenabschnitt $b = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$.

Beweis:
$M(\bar{x} / \bar{y}) \in g \Rightarrow g(x) = m \cdot (x - \bar{x}) + \bar{y} = m \cdot x - m \cdot \bar{x} + \bar{y} = m \cdot x + \bar{y} - m \cdot \bar{x}$, also $b = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$.

$$\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i) - y_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[m \cdot (x_i - \bar{x}) + \bar{y} - y_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[m \cdot (x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[m^2 \cdot (x_i - \bar{x})^2 - 2 \cdot m \cdot (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) + (y_i - \bar{y})^2\right]$$

$$= m^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - 2 \cdot m \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \quad \text{minimal} \quad \text{(nach m ableiten)}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot m \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = 0 \;\Leftrightarrow 2 \cdot m \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i \cdot y_i - x_i \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot y_i + \bar{x} \cdot \bar{y}\right]}{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot \bar{x} + \bar{x}^2\right]} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i + n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot \bar{x}^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{y} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right) - n \cdot \bar{x} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i\right) + n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot n \cdot \bar{x} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right) + n \cdot \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} + n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot n \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} + n \cdot \bar{x}^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2} \qquad \text{qed.}$$