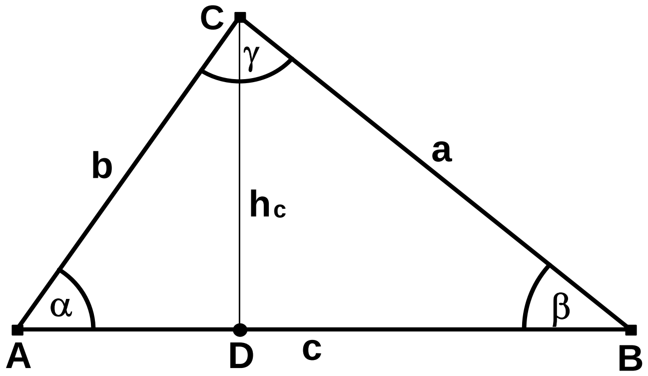
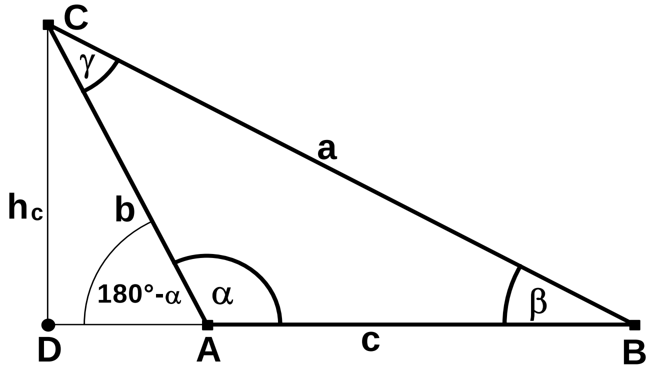
Der Sinussatz

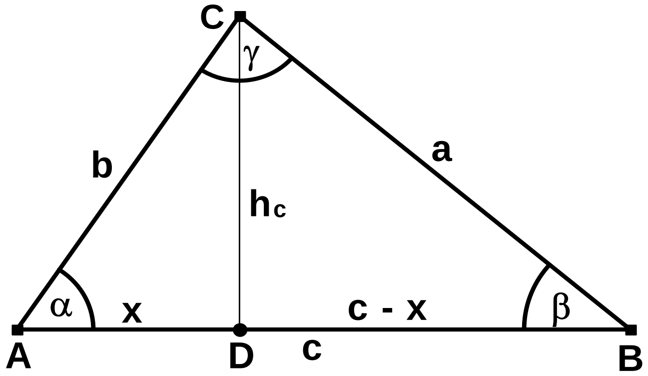
Im spitzwinkligen Dreieck gilt:	Im stumpfwinkligen Dreieck mit $\alpha > 90°$ gilt:
	$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ (0) 
ΔADC: $\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ $\Leftrightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha$ (1)	ΔADC: $\sin(180° - \alpha) = \frac{h_c}{b}$ $\Leftrightarrow h_c = b \cdot \sin(180° - \alpha) \underset{(0)}{=} b \cdot \sin\alpha$ (1)
ΔBDC: $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$ $\Leftrightarrow h_c = a \cdot \sin\beta$ (2)	ΔBDC: $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$ $\Leftrightarrow h_c = a \cdot \sin\beta$ (2)
(2) und (1) gleichsetzen: $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ $\Leftrightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ (3)	(2) und (1) gleichsetzen: $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ $\Leftrightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ (3)
Entsprechend gilt: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (4)	Entsprechend gilt: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (4)
(3) und (4) gleichsetzen: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$	(3) und (4) gleichsetzen: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
	Entsprechend erhält man diese Formel auch im stumpfwinkligen Dreieck mit $\beta > 90°$, bzw. $\gamma > 90°$.

Sinussatz: In jedem Dreieck gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Der Kosinussatz

Im spitzwinkligen Dreieck gilt:



ΔADC:

$$\cos\alpha = \frac{x}{b}$$

$$\Leftrightarrow x = b\cdot\cos\alpha \qquad (1)$$

ΔADC:

$$h_c^{\,2} + x^2 = b^2 \Leftrightarrow h_c^{\,2} = b^2 - x^2 \qquad (2)$$

ΔBDC:

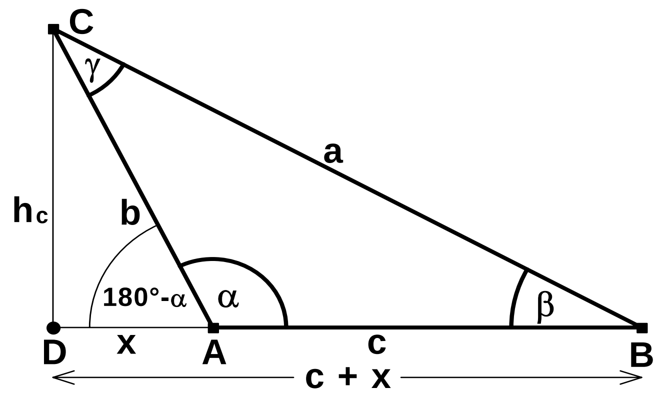
$$\begin{aligned} a^2 &= h_c^{\,2} + (c-x)^2 \\ &\underset{(2)}{=} b^2 - x^2 + (c-x)^2 \\ &= b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2cx \\ &\underset{(1)}{=} b^2 + c^2 - 2cb\cdot\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha \end{aligned}$$

Mit $\overline{BD} = x$ und $\overline{AD} = c - x$ erhält man entsprechend: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$.

Analog erhält man über die Höhe h_a, bzw. h_b: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

Im stumpfwinkligen Dreieck mit α > 90° gilt:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha \qquad (0)$$



ΔADC:

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{x}{b}$$

$$\Leftrightarrow x = b\cdot\cos(180° - \alpha) \underset{(0)}{=} -b\cdot\cos\alpha \qquad (1)$$

ΔADC:

$$h_c^{\,2} + x^2 = b^2 \Leftrightarrow h_c^{\,2} = b^2 - x^2 \qquad (2)$$

ΔBAC:

$$\begin{aligned} a^2 &= h_c^{\,2} + (c+x)^2 \\ &\underset{(2)}{=} b^2 - x^2 + (c+x)^2 \\ &= b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2cx \\ &\underset{(2)}{=} b^2 + c^2 + 2c(-b\cdot\cos\alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha \end{aligned}$$

Wie beim spitzwinkligen Dreieck erhält man über die Höhe h_a:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$ und

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

Entsprechend gelten diese Formeln auch im stumpfwinkligen Dreieck mit β > 90°, bzw. γ > 90°.

Kosinussatz: In jedem Dreieck gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$