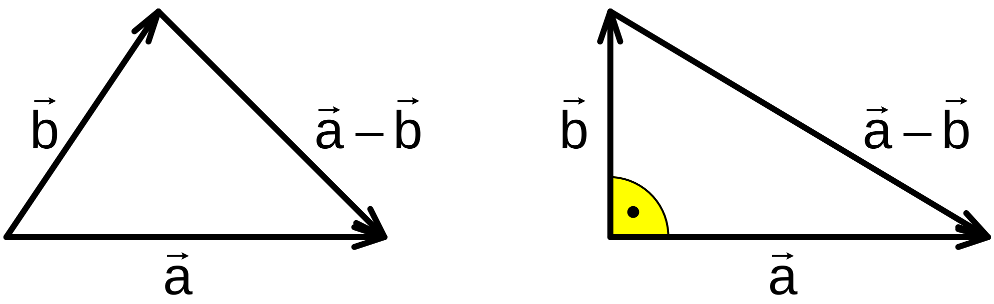
Das Skalarprodukt



Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras gilt:

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \left| \vec{a}-\vec{b} \right|^2 = \left| \vec{a} \right|^2 + \left| \vec{b} \right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right|^2 + \left| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$\Leftrightarrow (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2 = \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)+\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a_1^2-2a_1b_1+b_1^2\right)+\left(a_2^2-2a_2b_2+b_2^2\right)+\left(a_3^2-2a_3b_3+b_3^2\right)=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)+\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2+a_3^2-2a_3b_3+b_3^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2$$

$$\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2a_1b_1-2a_2b_2-2a_3b_3 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2$$

$$\Leftrightarrow -2a_1b_1-2a_2b_2-2a_3b_3=0$$

$$\Leftrightarrow -2\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

Definition:

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ heißt <u>das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$</u>.

Es gilt:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

Zwei Vektoren sind genau dann zueinander orthogonal,
wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist.