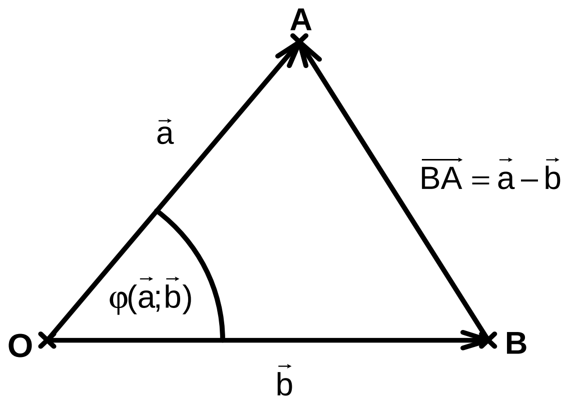
Winkel $\varphi(\vec{a};\vec{b})$ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ / Skalarprodukt

Kosinussatz:



$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left[\varphi(\vec{a};\vec{b})\right]$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left[\varphi(\vec{a};\vec{b})\right]$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2$$

$$= \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right|^2 - \left|\begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}\right|^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - \left((a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2\right)$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - \left(a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2\right)$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 - a_2^2 + 2a_2b_2 - b_2^2 - a_3^2 + 2a_3b_3 - b_3^2$$

$$= 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 = 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

$$\Leftrightarrow\ \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left[\varphi(\vec{a};\vec{b})\right] = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \Leftrightarrow \cos\left[\varphi(\vec{a};\vec{b})\right] = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

Definition:

Die Zahl $\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ heißt <u>das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$</u>.

Es gilt: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left[\varphi(\vec{a};\vec{b})\right]$

Damit berechnet sich der Winkel $\varphi(\vec{a};\vec{b})$ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu:

$$\cos\left(\varphi(\vec{a};\vec{b})\right) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\vec{a};\vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right)$$

Wichtiger Spezialfall: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

Zwei Vektoren sind genau dann zueinander orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist.