Das Bohrsche Modell des Wasserstoffatoms

Das negativ geladene Elektron des Wasserstoffatoms wird durch die anziehende Coulomb-Kraft des positiv geladenen Atomkerns zu einer Kreisbewegung veranlasst. Die Coulomb-Kraft ist hier also Zentripetalkraft.

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \Leftrightarrow \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = m_e v^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Allerdings sind nur bestimmte Bahnradien erlaubt, nämlich solche, bei denen der Bahndrehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{h}{2\pi}$ ist:

Bohrsche Quantenbedingung:

$$L = r \cdot m_e \cdot v = n \cdot \frac{h}{2\pi} \Leftrightarrow v = \frac{n \cdot h}{2\pi \cdot r \cdot m_e} \qquad \textbf{(2)}$$

Die Bohrsche Quantenbedingung erscheint plausibel, wenn man von der Vorstellung einer Materiewelle (De-Broglie-Welle) ausgeht: Dem Elektron entspricht eine Welle der Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e \cdot v}$. Damit sich diese Welle nicht selbst auslöscht, muss der Umfang der Elektronenbahn ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge sein:

$$2\pi \cdot r = n \cdot \frac{h}{m_e \cdot v} \Leftrightarrow v = n \cdot \frac{h}{2\pi \cdot r \cdot m_e} \quad \text{(s.o.)}$$

Bahnradius des Elektrons im Zustand mit der Hauptquantenzahl n:
(2) in (1) eingesetzt liefert:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = m_e v^2 \underset{(2)}{=} m_e \frac{n^2 \cdot h^2}{4\pi^2 \cdot r^2 \cdot m_e^2} = \frac{n^2 \cdot h^2}{4\pi^2 \cdot r^2 \cdot m_e} \Leftrightarrow \frac{e^2}{\varepsilon_0} = \frac{n^2 \cdot h^2}{\pi \cdot r \cdot m_e} \Leftrightarrow r = \frac{n^2 \cdot h^2 \cdot \varepsilon_0}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Energie des Elektrons im Zustand mit der Hauptquantenzahl n:

$$E = E_{pot} + E_{kin} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{m_e}{2} \cdot v^2 \underset{(2)}{=} \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{m_e}{2} \cdot \frac{n^2 \cdot h^2}{4\pi^2 \cdot r^2 \cdot m_e^2} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{n^2 \cdot h^2}{8\pi^2 \cdot r^2 \cdot m_e}$$

$$\underset{(3)}{=} \frac{-e^2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot e^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot n^2 \cdot h^2 \cdot \varepsilon_0} + \frac{n^2 \cdot h^2 \cdot \pi^2 \cdot m_e^2 \cdot e^4}{8\pi^2 \cdot m_e \cdot n^4 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot h^4} = \frac{-m_e \cdot e^4}{4\varepsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2} + \frac{m_e \cdot e^4}{8\varepsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2} = \frac{-m_e \cdot e^4}{8\varepsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Bahnradius und Energie des Elektrons im Zustand mit der Hauptquantenzahl n:

$r_n = \frac{h^2 \cdot \varepsilon_0}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} \cdot n^2$	$E_n = \frac{-m_e \cdot e^4}{8\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$